

Ю. Н. МАКОВ, академик Р. В. ХОХЛОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Для решения большинства задач по исследованию стохастических систем и процессов применимо приближение марковского случайного процесса (¹). При этом случайный процесс описывается соответствующим уравнением Фоккера — Планка, получение которого для исследуемой динамической системы (в том числе и нелинейной) обычно не представляет труда. Однако возможности аналитического решения этого уравнения сильно ограничены. К настоящему времени нестационарные решения уравнения Фоккера — Планка получены теми или иными методами лишь для линейных стохастических систем (^{2, 3}), что сильно сужает число «модельных» задач статистической радиофизики, для которых решение известно в явном виде.

В настоящей заметке найдены нестационарные решения уравнения Фоккера — Планка с коэффициентами сноса и диффузии, связанными некоторым дифференциальным уравнением, которое вытекает из метода решения.

Рассмотрим нелинейное динамическое уравнение

$$\frac{du}{dt} + G(u, t) = f(u, t); \quad (1)$$

здесь $G(u, t)$ — детерминированная функция. $f(u, t)$ — случайная функция со следующими свойствами:

- а) $f(u, t)$ — гауссовская случайная функция двух переменных,
- б) $\langle f \rangle = 0$,
- в) $\langle f(u, t)f(u', t') \rangle = 2K(u, u', t) \cdot \delta(t - t')$.

В этом случае следствием (1) является уравнение Фоккера — Планка для функции плотности вероятности $W(u, t)$, записываемое в виде (¹)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(G - \frac{\partial K(u, u', t)}{\partial u} \right)_{u'=u} \cdot W \right] + \frac{\partial^2}{\partial u^2} [K(u, u, t) \cdot W]. \quad (2)$$

Будем искать нестационарное решение уравнения (2) в виде

$$W(u, t) = c\psi(t) \cdot \exp [A(u, t) - \varphi(t) \cdot \Phi^2(u, t)], \quad (3)$$

где $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $A(u, t)$, $\Phi(u, t)$ — неизвестные функции соответствующих аргументов, подлежащие определению, c — нормировочная константа.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда

$$K(u, u', t) = k(u, t) \cdot k(u', t).$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$\begin{aligned} \psi/\psi + A - \varphi\Phi^2 - 2\varphi\Phi\dot{\Phi} = G' + GA' - 2\varphi G\Phi\Phi' + k'^2 + kk'' + 3kk'A' - \\ - 6kk'\varphi\Phi\Phi' + k^2A'^2 + k^2A'' - 4k^2A'\varphi\Phi\Phi' - \\ - 2k^2\varphi\Phi'^2 - 2k^2\varphi\Phi\Phi'' + 4k^2\varphi^2\Phi^2\Phi'^2; \end{aligned} \quad (4)$$

здесь и в дальнейшем точкой и штрихом обозначено дифференцирование по t и u соответственно.

Метод нахождения решения уравнения (4) при определенной связи между G и k состоит в следующем. Будем считать, что k также является неизвестной функцией. При этом все функции, кроме G , входящие в (4), подлежат определению. Чтобы в таком случае решить уравнение, необходимо привести его к виду, содержащему группы слагаемых, в каждую из которых входит одна неизвестная функция. Эта цель эффективно достигается, если мы потребуем выполнения следующих двух условий:

$$\begin{aligned} k &= \eta(t)/\Phi' \quad (\eta(t) - \text{произвольная функция}), \\ kA' &= -k' \quad \text{или} \quad A = -\ln k = \ln \Phi' - \ln \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом этих условий (4) значительно упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}/\psi &= \dot{\varphi}\Phi^2 - 2\varphi\Phi\dot{\Phi} + (\dot{\Phi})'/\Phi' - \dot{\eta}/\eta = \\ &= (G\Phi')'/\Phi' - 2\varphi G\Phi\Phi' - 2\varphi\eta^2 + 4\varphi^2\Phi^2\eta^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При получении (6) использовали следующие соотношения, вытекающие из условий (5):

$$\text{а) } A' = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \Phi' - \ln \eta) = (\dot{\Phi})'/\Phi' - \dot{\eta}/\eta.$$

$$\text{б) } k' = -\eta\Phi''/\Phi'^2 = -k^2\Phi''/\eta.$$

Уравнение (6) естественным образом распадается на четыре простых легко решаемых дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} G\Phi' - \dot{\Phi} &= 0, \\ (G\Phi' - \dot{\Phi})' &= 0, \\ \dot{\varphi} + 4\varphi^2\dot{\eta} &= 0, \\ \dot{\psi} + 2\varphi\psi\eta^2 - \psi\dot{\eta}/\eta &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причем второе выполняется автоматически при выполнении первого.

Решением последних двух являются

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\left(\int_0^t \eta^2 dt + \sigma_1^2\right)}, \quad \psi(t) = \frac{\eta\sigma_2}{\left(\int_0^t \eta^2 dt + \sigma_1^2\right)^{1/2}}, \quad (8)$$

где σ_1, σ_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, решение для W имеет вид

$$W(u, t) = \frac{c}{\left(2\int_0^t \eta^2 dt + \sigma_0^2\right)^{1/2}} \Phi' \exp\left[-\frac{(\Phi(u, t) - u_0)^2}{2\left(2\int_0^t \eta^2 dt + \sigma_0^2\right)}\right], \quad (9)$$

где σ_0 и u_0 — константы для выбора начальных условий. Относительно Φ распределение (9) является нормальным.

Отметим, что второе из уравнений (7) накладывает связь на G и k , при которой справедливо решение (9). Действительно, с учетом первого из условий (6), имеем

$$G'k - Gk' + \dot{k} - k\dot{\eta}/\eta = 0. \quad (10)$$

Поскольку (10) является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно и k , и G , то в решение и для k , и для G войдут произвольные функции. Поэтому можно сказать, что связь между коэффициентами k и G , определяемая (10), является не однозначной, а многофункциональной.

Таким образом, зная $G(u, t)$, паходим из (10) все $k(u, t)$, для которых справедливо решение (9), либо, зная $k(u, t)$, определяем $G(u, t)$. В этом смысле пары функций $G(u, t)$ и $k(u, t)$, удовлетворяющие (10), можно называть сопряженными.

В линейном случае $G(u) = -\gamma u$ решением первого уравнения (7) является $\Phi(u, t) = e^{-\gamma t} u$. При этом из (5) имеем $k(u, t) = \eta(t) e^{\gamma t}$. Полагая $\eta(t) = \alpha e^{-\gamma t}$, из (9) получаем хорошо известный результат для W ^(2, 4)

$$W(u, t) = \frac{ce^{-\gamma t}}{\left[\frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + \sigma_0^2 \right]^{1/2}} \exp \left[- \frac{(e^{-\gamma t} u - u_0)^2}{2 \left[\frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + \sigma_0^2 \right]} \right],$$

$$k = \alpha = \text{const.}$$

В случае нелинейной зависимости $G(u)$, например $G(u) = -\gamma u + \beta u^3$, решением (7) является

$$\Phi(u, t) = ue^{-\gamma t} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) u^2 \right)^{-1/2}.$$

Для $k(u, t)$ из (5) получаем следующее выражение:

$$k(u, t) = \eta(t) e^{\gamma t} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) u^2 \right)^{1/2}.$$

Вновь полагая $\eta(t) = \alpha e^{-\gamma t}$, из (9) получаем

$$W(u, t) = \frac{ce^{-\gamma t} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) u^2 \right)^{-1/2}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + \sigma_0^2 \right)^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{\left[ue^{-\gamma t} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) u^2 \right)^{-1/2} - u_0 \right]^2}{2 \left[\frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + \sigma_0^2 \right]} \right\},$$

$$k(u, t) = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) u^2 \right)^{1/2}.$$

Оставляя в стороне физический анализ полученного решения, следует отметить, что схема его нахождения может быть использована в целом ряде задач статистической физики, теории информации и связи, теории автоматического регулирования.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, т. 110, № 4 (1973). ² А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, М., 1968. ³ В. И. Тихонов, Н. К. Кульман, Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, М., 1975. ⁴ Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., 1961.