

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 IV 1976)

В статье даются необходимые и одновременно достаточные условия для функции, стабилизирующейся на бесконечности с порядком $2n$ к тригонометрическому многочлену степени n в метрике L_p (в частности, при $p=+\infty$ — в обычном смысле), устанавливаются формулы для коэффициентов этого многочлена и определяется скорость стабилизации.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$, a — некоторое число, и принадлежит пространству L_p , $1 \leq p < +\infty$, на любом конечном отрезке $[a, b]$, $a < b < +\infty$. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет p -предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^{(p)}f(x) = A$, если существует $\int_a^{+\infty} |f(x) - A|^p dx$ и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} |f(t) - A|^p dt = 0.$$

В случае $p=+\infty$ под p -пределом будем понимать обычный предел.

Локально суммируемую функцию $f(x)$ будем называть p -интегрируемой, $1 \leq p \leq +\infty$, в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ (короче, просто p -интегрируемой), если существует конечный p -предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^{(p)} \int_a^x f(t) dt$. Этот предел будем называть p -интегралом и обозначать

$$\int_a^{+\infty} {}^{(p)}f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} {}^{(p)} \int_a^x f(t) dt.$$

Если у функции $f(x)$ существует обычный несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и p -интеграл $\int_a^{+\infty} {}^{(p)}f(x) dx$ при некотором p , $1 \leq p < +\infty$, то они равны. Если функция $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, +\infty)$ и при некотором p , $1 \leq p < +\infty$, она p -интегрируема, то ее p -интеграл совпадает с обычным. С другой стороны, существуют неотрицательные функции, для которых сходятся обычные несобственные интегралы, но при всех p , $1 \leq p < +\infty$, они не p -интегрируемы. Наконец, существуют знакопеременные p -интегрируемые при некотором p , $1 \leq p < +\infty$, функции, для которых обычный несобственный интеграл расходится. Функцию $f(x)$ будем называть абсолютно p -интегрируемой, если существует p -интеграл $\int_a^{+\infty} {}^{(p)}|f(x)| dx$. Если функция $f(x)$ абсолютно p -интегрируема, то она и просто абсолютно интегрируема в несобственном смысле, причем $\int_a^{+\infty} {}^{(p)}f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$, и, таким образом, свойство абсолютной p -интегрируемости сильнее обычной абсолютной интегрируемости ($p < +\infty$). На p -интегралы

переносятся многие свойства обычных несобственных интегралов: линейность, аддитивность по множествам, признак сравнения для существования интегралов от неотрицательных функций, возможность интегрирования неравенств.

Будем говорить, что функция $f(x)$ p -стабилизируется к функции $g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}^{(p)} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Отношение стабилизации рефлексивно, симметрично, транзитивно и обладает свойством линейности. Если у функции $f(x)$ все ее производные до порядка k включительно p -стабилизируются при $x \rightarrow +\infty$ к соответствующим производным функции $g(x)$, то будем говорить, что функция $f(x)$ p -стабилизируется к функции $g(x)$ с порядком k .

Понятие p -предела можно обобщить на случай банаховых пространств функций. Пусть B — банахово пространство каких-то функций и пусть для некоторой функции f существует такое число C , что $\|f - C\|_B < +\infty$ (при этом не предполагается, что $f \in B$). Тогда можно показать, что существует такое число A , что $\|f - A\|_B = \inf_C \|f - C\|_B$, где нижняя грань берется

по всем C , для которых $f - C \in B$ (это множество состоит либо из одного числа, либо из всех действительных, соответственно комплексных, чисел). Это значение A естественно назвать средним значением функции f в банаховом пространстве B . p -Предел является в этой терминологии средним значением функции в пространстве $L_p(a, +\infty)$.

Пусть задано n попарно различных комплексных чисел (частот) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и пусть $\omega_{-k} = -\omega_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\omega_0 = 0$.

Положим

$$B_\mu = -\frac{1}{2\mu^2} e^{-i\mu x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} + i\mu \right), \quad L_\mu = \frac{d^2}{dx^2} + \mu^2,$$

где μ — некоторое комплексное число, и введем обозначения

$$L = \prod_{j=1}^n L_{\omega_j}, \quad L_{\hat{k}} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n L_{\omega_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\kappa_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\omega_j^2 - \omega_k^2)^{-1}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n;$$

$$A_k = \begin{cases} \kappa_0 L, & \text{если } k = 0, \\ \kappa_k B_{\omega_k} L_{\hat{k}}, & \text{если } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \end{cases}$$

Тогда для любого тригонометрического многочлена

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\omega_k x} \quad (1)$$

степени n будем иметь

$$a_k = A_k T(x), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Справедливо и обратное утверждение: если для $2n$ раз дифференцируемой на некотором промежутке функции $f(x)$ функции $A_k f(x)$ суть постоянные: $A_k f(x) = a_k$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, то $f(x)$ совпадает на этом промежутке с тригонометрическим многочленом (1). Это следует из тождества (см. (1))

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n A_k f(x) e^{i\omega_k x}, \quad (2)$$

справедливого для любой $2n$ раз дифференцируемой функции. Из этого тождества следует также, что если существуют конечные p -пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}^{(p)} A_k f(x) = a_k, \quad k=0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

то функция $f(x)$ p -стабилизируется при $x \rightarrow +\infty$ к тригонометрическому многочлену (1).

Рассмотрим задачу о p -стабилизации порядка $2n$ к тригонометрическому многочлену (1). Корректность этой задачи вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет при $x \geq a$ обобщенную производную порядка $2n$, которая в случае $1 \leq p < +\infty$ локально принадлежит пространству L_p .

Тогда, если функция $f(x)$ p -стабилизируется, $1 \leq p \leq +\infty$, с порядком $2n$ к некоторому тригонометрическому многочлену (1) степени n , то такой многочлен единственный.

Критерий p -стабилизации порядка $2n$ дается следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая на любом конечном отрезке абсолютно непрерывную производную $f^{(2n)}(x)$, p -стабилизировалась, $1 \leq p \leq +\infty$, с порядком $2n$ при $x \rightarrow +\infty$ к некоторому тригонометрическому многочлену вида (1), необходимо и достаточно, чтобы у функций $A_k f(x)$ существовали конечные p -пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}^{(p)} A_k f(x) = a_k, \quad k=0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (3)$$

При выполнении этого условия функция $f(x)$ p -стабилизируется с порядком $2n$ при $x \rightarrow +\infty$ к многочлену (1) с коэффициентами (3) и

$$f^{(m)}(x) - T^{(m)}(x) = O(\psi(x)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad m=0, 1, \dots, 2n,$$

где

$$\psi(x) = \max_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} \left| \int_x^{+\infty} e^{i\omega_k t} dL f(t) \right|.$$

p -интегралы, стоящие в правой части этой формулы, существуют в силу условия (3). Если они существуют как при некотором $p < +\infty$, так и при $p = +\infty$ (т. е. в обычном смысле), то

$$\int_x^{+\infty} |f^{(m)}(x) - T^{(m)}(x)|^p dx = O \left(\max_{k=0, \pm 1, \dots, \pm n} \int_x^{+\infty} \left| \int_t^{+\infty} e^{i\omega_k u} dL f(u) \right|^p dt \right),$$

$$m=0, 1, \dots, 2n.$$

Таким образом, теорема 2 сводит задачу о p -стабилизации порядка $2n$ функции к тригонометрическому полиному к вычислению p -пределов (3) (в частности, при $p = +\infty$ — к вычислению обычных пределов) функций, алгоритмически строящихся по заданной функции $f(x)$. Аналогичные критерии p -стабилизации справедливы для p -стабилизации функций к тригонометрическим многочленам специального вида, у которых отдельные коэффициенты равны нулю, например к однородным тригонометрическим многочленам.

Примером решений обыкновенных дифференциальных уравнений, p -стабилизирующихся с порядком $2n$ при $x \rightarrow +\infty$ к тригонометрическим многочленам, являются решения уравнения

$$\frac{d}{dx} Ly = \varphi(x). \quad (4)$$

Для того чтобы у такого уравнения с локально суммируемой правой частью $\varphi(x)$ существовало решение, которое бы p -стабилизировалось,

$1 \leq p \leq +\infty$, с порядком $2n$ при $x \rightarrow +\infty$ к заданному тригонометрическому многочлену вида (1), необходимо и достаточно существование p -интегралов

$$\int_0^{+\infty} e^{i\omega_k x} \varphi(x) dx, \quad k=0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

причем из существования этих p -интегралов следует, что любое решение уравнения (4) p -стабилизируется с порядком $2n$ к некоторому тригонометрическому полиному $T(x)$ вида (1).

Другим подобным примером являются решения уравнения

$$\frac{d}{dx} Ly + f(x)y = 0 \quad (5)$$

при условии, что все частоты ω_k являются действительными числами.

Если функция $f(x)$ абсолютно p -интегрируема на $[a, +\infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$, то для любого тригонометрического многочлена $T(x)$ вида (1) существует решение уравнения (5), p -стабилизирующееся с порядком $2n$ при $x \rightarrow +\infty$ к этому многочлену, и любое решение уравнения (5) p -стабилизируется на бесконечности со степенью $2n$ к некоторому тригонометрическому многочлену (1).

Многие из известных результатов об асимптотическом в обычном смысле поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (2-4)) могут быть перенесены с помощью понятия p -предела и p -интеграла на случай метрики L_p .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Кудрявцев, Тр. Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 134, 124 (1975).
- ² М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
- ³ Э. А. Коттингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.
- ⁴ В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1968.