

К. С. МАТВИЙЧУК

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ ПРИВЕДЕННЫХ МАТРИЦ ПЛОТНОСТИ
КАНОНИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 23 X 1975)

1°. При изучении равновесных состояний бесконечных систем статистической физики возникают трудные задачи, относящиеся к обоснованию термодинамического предельного перехода. Решению таких задач для классических систем в рамках канонического ансамбля посвящены работы Боголюбова, Хацета (¹⁻³), в которых впервые предпринято математически строгое изучение термодинамического предельного перехода для корреляционных функций в случае положительных парных потенциалов взаимодействия и достаточно малых плотностей. В последующей работе Боголюбова, Петрины, Хацета (⁴) полностью решена задача о существовании термодинамического предела для классических систем частиц, потенциал взаимодействия которых содержит конечное притяжение.

Для решения подобных задач в работе Рюэлля (⁵) использован формализм большого канонического ансамбля и впервые применена симметризация исходных операторных уравнений Кирквуда — Зальсбурга (К.—З.). Результаты этой работы использованы Жинибром при обосновании термодинамического предельного перехода для квантовых систем в рамках формализма большого канонического ансамбля (^{6, 7}).

Задача о термодинамическом пределе для квантовых систем в рамках формализма канонического ансамбля до настоящего времени математически строго не изучалась. Целью настоящей работы является построение строгого математического описания равновесных состояний квантовых систем на основе теории канонического ансамбля. При этом используется метод Боголюбова (⁴) и развитая Жинибром техника, основанная на применении теории континуального интегрирования по мере Винера (^{6, 7}).

2°. Пусть в сфере $V \subset R^v$ радиуса d ($V = vN$, $v = \text{const}$), задана квантовая система N тождественных частиц, подчиняющихся статистике Максвелла — Больцмана и взаимодействующих посредством парного регулярного и стабильного потенциала Φ (^{4, 6}):

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(|x_i - x_j|) \geq -NB, \quad B \geq 0; \quad x_i \in R^v, \quad i = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим последовательность сфер V , радиус которых стремится к ∞ . В каждом пространстве Гильберта $L^2(V^N)$ с помощью нулевых граничных условий определим гамильтониан $H_{N, v}$ системы N частиц как самосопряженное расширение симметрического оператора

$$\mathcal{H}_{N, v} = -\Delta + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(|x_i - x_j|),$$

определенного на дважды непрерывно дифференцируемых функциях Ψ с носителем внутри V .

Основная теорема. Для достаточно малых плотностей $1/v$ и $\beta > 0$ существуют приведенные матрицы плотности канонического ансамбля, являющиеся голоморфными функциями от плотности.

3°. Укажем кратко идею доказательства основной теоремы. Для систем указанного типа рассмотрим m -частичные приведенные матрицы плотности F . При помощи меры Винера $P_{x,y}(d\omega)$ они определяются как интегральный оператор с ядром

$$F_N(x^m, y^m; V) = \int P_{x^m, y^m}(d\omega^m) R_N(\omega^m; V), \quad (1)$$

где

$$R_N(\omega^m; V) = \frac{1}{n! Q(N, V)} \int P_{u^n, u^n}(d\omega^n) \alpha_n(\omega^n) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^\beta \sum_{0 \leq i < j \leq N} [\Phi \omega_i(t) - \omega_j(t)] dt \right\}, \quad (2)$$

$$n = N - m,$$

$Q(N, V)$ — малая статистическая сумма; $\alpha_n(\omega^n)$ — характеристическая функция множества наборов траекторий ω^n в области V . Изучим функционалы (2) и их пределы $R(\omega^m, v)$. В пространстве Банаха E_ζ (^{4, 6}) определим, как и в работе (⁴), операторы $K, K_m, K_m^{N-l}, K^{(N-l)}, A_d$. Последовательности функционалов (2) образуют векторы из пространства E_ζ . Для них в конечном объеме интегральных уравнений не существует, а существуют соотношения

$$R_{N-l} = K^{(N-l)} R_{N-l-1} + R_{0, N-l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad N-l \geq 3.$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ имеем интегральное уравнение

$$R_l = K^l R_{l+1} + R_{0, l}. \quad (3)$$

Чтобы при $N \rightarrow \infty$ получить предельные интегральные уравнения К.—З.

$$R = KR + R_0, \quad (4)$$

докажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_{N-l}(\omega^m; V) = R_l(\omega^m, v) = R(\omega^m, v)$$

при $l = 1, 2, \dots$

Прежде всего имеет место следующая

Теорема 1. Для регулярных потенциалов Φ и условий

$$\frac{1}{|v|} < \frac{1}{2\lambda M(\beta) e^{2\beta B+1}}, \quad |z_l(v)| \leq 2\lambda, \quad (5)$$

$$M(\beta) = \frac{\beta e^{2\beta B}}{\lambda} \int |\Phi(x)| dx; \quad \lambda = (2\pi\beta)^{1/2},$$

операторы $K^l, l = 0, 1, 2, \dots$, являются ограниченными операторами в пространстве E_ζ ; системы (3), (4) имеют в E_ζ единственное решение, являющееся голоморфной функцией от $z_l(v), l = 0, 1, 2, \dots$, и плотности $1/v$; предельные функционалы $R(\omega, v)$ являются голоморфными функциями от $1/v$ в окрестности нуля.

Решение уравнения (3) представляется вектором

$$R_l = R_{0, l} + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i K^{l+j} R_{0, l+j} \in E_\zeta, \quad R_{0, l} = \left\{ \frac{1}{v} z_l(v), 0, 0, \dots \right\}.$$

Выберем сферу $V_{d-\delta} \subset V$ радиуса $d_1 = d - \delta$. Потребуем чтобы $d \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow \infty$ вместе с $N \rightarrow \infty$ и $\delta/d \rightarrow 0$.

Справедлива

Теорема 2. Если

$$\frac{1}{|v|} < \frac{1}{2\lambda M(\beta) e^{2\beta B+1}},$$

то при любом фиксированном l и $N \rightarrow \infty$ последовательность операторов $A_{d-\delta}(K_m - K_m^{N-1})$ сходится по норме к нулю; векторы $A_{d-\delta}(R_{N-l} - R_l)$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю в пространстве E_ζ .

4°. Для векторов R_l выполняется оценка

$$\|R_l - R_{l+1}\|_\zeta \leq \frac{2}{1-k} \varepsilon(v)^j$$

при любом j и $\varepsilon(v) < 1$. Отсюда следует, что при достаточно малых значениях плотности $1/v$ предельные функции $z_l(v)$, $l=0, 1, 2, \dots$, равны между собой; векторы R_l , $l=0, 1, 2, \dots$, совпадают и образуют решение системы интегральных уравнений К.-З. ⁽⁴⁾; для предельных ядер частичной матрицы F получаем равенство

$$F^l(x^m, y^m; v) = \dots = F(x^m, y^m; v).$$

Эти результаты вместе с результатами теорем 1, 2 позволяют доказать следующие утверждения.

Теорема 3. Функции $F_N(x^m, y^m; V)$ стремятся к пределу $F(x^m, y^m; v)$ равномерно на каждом компакте $D \subset V$, когда $N \rightarrow \infty$.

Теорема 4. При $N \rightarrow \infty$ допредельная m -частичная матрица плотности канонического ансамбля F_N стремится к пределу F в смысле сильной топологии в пространстве операторов на $L^2(R^m)$.

Теоремы 1–4 полностью доказывают основную теорему.

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
9 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., 1946. ² Н. Н. Боголюбов, Б. И. Хацет, ДАН, т. 66, 324 (1949). ³ Б. И. Хацет, Наук. зап. Житомирськ. пед. инст., физмат. сер. 3, 113 (1966). ⁴ Н. Н. Боголюбов, Д. Я. Петрина, Б. И. Хацет, Теоретич. и матем. физ., т. 1, № 2 (1969). ⁵ D. Ruelle, Ann. Phys., v. 25, 209 (1963). ⁶ J. Ginibre, J. Math. Phys., v. 6, 238 (1965). ⁷ J. Ginibre, ibid., v. 6, 1432 (1965).