

Ю. П. БОГЛАЕВ

**ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 XII 1975)

Пусть имеются нелинейные операторы $A(y)$, $B(y)$, определенные на классах дифференцируемых функций $y(x) \in C^k[0, 1]$. Рассмотрим операторное уравнение

$$A(y) + \varepsilon B(y) = 0, \quad (1)$$

ε — малый положительный параметр. Ищем решение (1) на множестве $\mathcal{U}$.

Уравнение (1) или задача (1) сингулярно возмущенные, если уравнение $A(y) = 0$ неразрешимо на $\mathcal{U}$. Предполагается, что уравнение (1) имеет решение на $\mathcal{U}$.

Под регуляризацией обычно понимается переход от задачи (1) к другой, к которой можно применить либо известный метод возмущений, либо построение приближенного решения осуществить проще, чем в случае задачи (1). Известные регуляризующие процедуры сводятся в основном к растяжению области изменения независимой переменной x (¹⁻⁴).

Ниже рассматриваются классы задач, где регуляризация растяжением требует разбиения области изменения x на три зоны и построения асимптотики решения в каждой из зон (^{2, 3}). Параметрическая регуляризация упрощает построение приближенного решения в некоторых задачах с трехзонной асимптотикой.

Опишем общую схему метода в форме, удобной для дальнейшего изложения.

Будем искать решения (1) $y(x)$ в параметрическом виде

$$x = \varphi(t, u) \quad y = \psi(t, u). \quad (2)$$

Пусть отображения φ , ψ и обратные φ^{-1} , ψ^{-1} определены и достаточно гладкие на плоскости (t, u) и (x, y) . Пусть в результате преобразования (2) уравнение (1) может быть приведено к виду

$$F(u) + \varepsilon G(u) = 0, \quad (3)$$

где $F(u)$, $G(u)$ — нелинейные операторы. Будем искать решение (3) — $u(t)$ — на множестве функций $\mathcal{U}$, $u(t) \in C^k[\omega_1, \omega_2]$. Пусть $u(t, \varepsilon)$ — решение (3) такое, что если $t \in [\omega_1, \omega_2]$, то $0 \leq \varphi(t, u(t, \varepsilon)) \leq 1$. Тогда соотношения

$$x = \varphi(t, u(t, \varepsilon)), \quad u = \psi(t, u(t, \varepsilon)), \quad \omega_1 \leq t \leq \omega_2 \quad (4)$$

дают параметрическое представление решения (1). Предположим, что первое из соотношений (4) разрешимо относительно t , получим $t = t(x, \varepsilon)$, $0 \leq x \leq 1$. Окончательно решение (1) представляется в виде

$$y = \psi(t(x, \varepsilon), u(t(x, \varepsilon), \varepsilon)). \quad (5)$$

Основная задача параметрической регуляризации состоит в нахождении $\varphi(t, u)$, $\psi(t, u)$ таких, чтобы построение приближений n -го порядка точности $U_n(t, \varepsilon)$ к решению (3) была задачей более простой, чем построение соответствующих приближений $Y_n(x, \varepsilon)$ к решению (1).

1°. Краевые задачи с малым параметром при старшей производной. Рассмотрим краевую задачу с «начальным скачком» (2). В принятых выше обозначениях будем иметь

$$B(y) = \ddot{y}x^2, \quad A(y) = -f(\dot{y}_x, y, x), \quad (6)$$

$$\mathfrak{U} = \{y(x) \in C^2[0, 1], y(0) = y(1) = 0\}.$$

Предположим, что невозмущенное уравнение $f(\dot{y}_x, y, x) = 0$ имеет решение $\dot{y}_x = g(y, x)$, существует решение $\bar{y}(x)$ задачи $y_x = g(y, x)$, $y(1) = 0$, $\bar{y}(x) \in C^2[0, 1]$, $|\bar{y}(0)| > 0$. Введем в рассмотрение область $\Omega = \{y_x, y, x : -\infty < y_x < +\infty, |y - \bar{y}(x)| \leq d, 0 \leq x \leq 1\}$, $d > |\bar{y}(0)|$.

Условия А. 1) $f(y_x, y, x) \in C^{n+2}[\Omega]$, $n \geq 1$;

2) $f_{y_x}' \leq -\rho < 0$, $f_y' > 0$ в области Ω ;

3) имеет место представление $f(\dot{y}_x, y, x) = (\dot{y}_x)^2 \Phi_0(y, x) + \Phi_1(\dot{y}_x, y, x)$, где $\Phi_0(y, x) \leq -\kappa < 0$, $|\Phi_1(\dot{y}_x, y, x)| < c(1 + |y_x|)$ в области Ω .

Здесь и в дальнейшем буквой c обозначаются различные не зависящие от ε постоянные. Условия А1) — 3) обеспечивают однозначную разрешимость уравнения (1) для $\varepsilon > 0$ на $\mathfrak{U}$.

Будем искать решение краевой задачи

$$\varepsilon \ddot{y}_x = f(\dot{y}_x, y, x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (7)$$

эквивалентной уравнению (1) на $\mathfrak{U}$, в параметрическом виде

$$x = \varphi(t, u) = t \cos \varphi_0 - u \sin \varphi_0, \quad y = \psi(t, u) = t \sin \varphi_0 + u \cos \varphi_0, \quad (8)$$

где $\pi/2 > \varphi_0 > 0$, если $\bar{y}(0) > 0$, $\dot{y}_x \geq -m$, $\operatorname{ctg} \varphi_0 > m > 0$, или $-\pi/2 < \varphi_0 < 0$, если $\bar{y}(0) < 0$, $\dot{y}_x \leq m$, $\operatorname{ctg} \varphi_0 < -m < 0$.

Соотношение (8) описывает переход к новой системе координат (t, u) вращением вокруг начала координат (x, y) . Задача (7) с учетом (8) преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{u}_t &= \sin^3 \varphi_0 (\operatorname{ctg} \varphi_0 - \dot{u}_t)^3 f[(1 + \operatorname{ctg} \varphi_0 \dot{u}_t) (\operatorname{ctg} \varphi_0 - \dot{u}_t)^{-1}, \\ & t \sin \varphi_0 + u \cos \varphi_0, t \cos \varphi_0 - u \sin \varphi_0] = F(\dot{u}_t, u, t), \\ u(0) &= 0, \quad u(\cos \varphi_0) = -\sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая с (3), получим $F(u) \equiv F(\dot{u}_t, u, t)$, $G(u) \equiv \ddot{u}_t$,

$$\mathfrak{U} = \{u(t) \in C^2[0, \cos \varphi_0], u(0) = 0, u(\cos \varphi_0) = -\sin \varphi_0\}.$$

Если исходная задача (7) представляет собой задачу с «начальным скачком», то регуляризованная задача (9) может быть рассмотрена как краевая задача с «внутренним пограничным слоем» (4). Действительно, уравнение $F(\dot{u}_t, u, t) = 0$ имеет два корня

$$\dot{u}_t^{(1)} = \operatorname{ctg} \varphi_0, \quad \dot{u}_t^{(2)} = (g_1(t, u) \operatorname{ctg} \varphi_0 - 1) (g_1(t, u) + \operatorname{ctg} \varphi_0)^{-1}, \quad (10)$$

где $g_1(t, u) = g(t \sin \varphi_0 + u \cos \varphi_0, t \cos \varphi_0 - u \sin \varphi_0)$. Как и в (4), вырожденное решение для (9) — $\bar{u}(t)$ — представляет собой ломаную линию $\bar{u}(t) = \bar{u}^{(1)}(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, $\bar{u}(t) = \bar{u}^{(2)}(t)$, $t_0 \leq t \leq \cos \varphi_0$. Легко определить $t_0 = \bar{y}(0) \sin \varphi_0$, $\bar{u}^{(1)}(t) = (\operatorname{ctg} \varphi_0) t$; $\bar{u}^{(2)}(t)$ есть решение второго уравнения из (10) с условием $\bar{u}^{(2)}(\cos \varphi_0) = -\sin \varphi_0$. Нетрудно проверить, что условия А1) — 3) обеспечивают возможность построения асимптотики порядка n для задачи (9) методом А. Б. Васильевой (см. (4), § 15). Обозначим асимптотическое разложение n -го порядка решения (9) через $U_n(t, \varepsilon)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия А. Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение задачи (7) — $y(x, \varepsilon)$ — и имеет место

$$|y(x, \varepsilon) - Y_n(x, \varepsilon)| < c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где

$$Y_n(x, \varepsilon) = t_n(x, \varepsilon) \sin \varphi_0 + U_n(t_n(x, \varepsilon), \varepsilon) \cos \varphi_0, \quad (11)$$

$t_n(x, \varepsilon)$ — корень уравнения $x = t \cos \varphi_0 - U_n(t, \varepsilon) \sin \varphi_0$.

Заметим: а) если не требуется получения явного выражения $Y_n = Y_n(x, \varepsilon)$, а достаточно параметрического (8), то отпадает необходимость определять $t_n(x, \varepsilon)$; б) из представления в условии А3) следует, что порядок роста f на бесконечности по y_x равен 2. Это обеспечивает экспоненциальную отрицательную и положительную устойчивость соответствующих решений $\bar{u}^{(1)}(t)$ и $\bar{u}^{(2)}(t)$. В случае других порядков роста α , $0 < \alpha < 2$, теряется экспоненциальная устойчивость и построение $U_n(t, \varepsilon)$ представляет самостоятельную задачу.

2°. Краевые задачи с вырождением степени роста. Рассмотрим вариант задачи, изучавшейся в (3). Примем

$$A(y) = \ddot{y}x^2 - f_0(\dot{y}_x, y, x), \quad B(y) = f_1(\dot{y}_x, y, x) \ddot{y}x^2, \quad (12)$$

$$\mathfrak{U} = \{y(x) \in C^2[0, 1], y(0) = y(1) = 0\}.$$

Предположим, что уравнение $A(y) = 0$ неразрешимо на $\mathfrak{U}$. Пусть невозмущенное уравнение $\ddot{y}x^2 = f_0(\dot{y}_x, y, x)$ имеет решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее условиям $\dot{y}_x(0) = \infty$, $y(1) = 0$, $\bar{y}(x) \in C^2[0, 1]$, $\bar{y}(x) \in C[0, 1]$, $|\bar{y}(0)| > 0$. Определим область Ω так же, как в п. 1°. Обозначим $f_\varepsilon = f_0(1 + \varepsilon f_1)^{-1}$.

Условия Б. 1) $f_\varepsilon(y_x, y, x) \in C^3[\Omega]$ для значений $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

2) $f_{\varepsilon y'} > 0$ в области Ω ;

3) имеют место представления

$$f_0(\dot{y}_x, y, x) = \dot{y}_x^3 \Phi_0(y, x) + \Phi_1(\dot{y}_x, y, x),$$

где $\Phi_0(y, x) \leq -\kappa < 0$, $|\Phi_1(\dot{y}_x, y, x)| < c$, $(-\dot{y}_x)^3 = -(\dot{y}_x)^3$,

$$f_1(\dot{y}_x, y, x) = \dot{y}_x^{\beta-\alpha} \Psi_0(y, x) + \Psi_1(\dot{y}_x, y, x),$$

где $\Psi_0(y, x) \geq \kappa > 0$, $|\Psi_1(\dot{y}_x, y, x)| < c$, $\Psi_1(\dot{y}_x, y, x) > 0$, $(-\dot{y}_x)^{\beta-\alpha} = (\dot{y}_x)^{\beta-\alpha}$;

4) $\beta > 2$, $0 < \alpha < 2$, $3 - 2\beta + \alpha \geq 0$.

Условия Б1)–4) обеспечивают однозначную разрешимость уравнения (1) на $\mathfrak{U}$ для малых ε и приводят к явлению пограничного слоя в окрестности $x=0$ (3). Будем искать решение краевой задачи

$$\ddot{y}x^2 = f_\varepsilon(\dot{y}_x, y, x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (13)$$

эквивалентной уравнению (1) на $\mathfrak{U}$, в параметрическом виде (8). Тогда задача (13) преобразуется в следующую:

$$\ddot{u}t^2 = \sin^3 \varphi_0 (\operatorname{ctg} \varphi_0 - \dot{u}_t)^3 f_\varepsilon[(1 + \operatorname{ctg} \varphi_0 \dot{u}_t)(\operatorname{ctg} \varphi_0 - \dot{u}_t)^{-1}, t \sin \varphi_0 + u \cos \varphi_0, t \cos \varphi_0 - u \sin \varphi_0] = F_\varepsilon(\dot{u}_t, u, t), \quad u(0) = 0, \quad u(\cos \varphi_0) = -\sin \varphi_0. \quad (14)$$

Сравнивая (14) и (3), нетрудно определить операторы $F(u)$, $G(u)$. Множество $\mathfrak{U}$ совпадает с введенным в п. 1°. Преобразуем (14) к краевой задаче с однородными условиями заменой $u = v - (\operatorname{tg} \varphi_0)t$. Получим

$$P_\varepsilon(v) = \ddot{v}t^2 - F_\varepsilon^1(\dot{v}_t, v, t) = 0, \quad v(0) = v(\cos \varphi_0) = 0. \quad (15)$$

Легко проверить, что уравнение (15) регулярно возмущенное в том смысле, что уравнение $P_0(v) = 0$ имеет решение на множестве $\{v(t) \in$

$\in C^2[0, \cos \varphi_0]$, $v(0) = v(\cos \varphi_0) = 0$. Для приближенного решения (15) воспользуемся модифицированным методом Ньютона⁽⁵⁾. Рассмотрим нелинейный оператор $P_\varepsilon(v)$, действующий из банахова пространства $C_0^2[0, \cos \varphi_0]$ дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $[0, \cos \varphi_0]$ функций, обращающихся в концах интервала в нуль, с нормой

$$\|v(t)\|_2 = \max_{0 \leq t \leq \cos \varphi_0} |v(t)| + \max_{0 \leq t \leq \cos \varphi_0} |\dot{v}_t(t)| + \varepsilon \max_{0 \leq t \leq \cos \varphi_0} |\ddot{v}_t(t)|$$

в банахово пространство $C[0, \cos \varphi_0]$ с нормой $\|w(t)\| = \max_{0 \leq t \leq \cos \varphi_0} |w(t)|$.

Задача (15) в операторном виде эквивалентна решению уравнения $P_\varepsilon(v) = 0$ в пространстве $C_0^2[0, \cos \varphi_0]$. Построим итерационный процесс, соответствующий модифицированному методу Ньютона

$$v_{n+1} = v_n - [P'_\varepsilon(v_0)]^{-1} P_\varepsilon(v_n), \quad n = 0, 1, \dots; \quad (16)$$

в (16) $P'_\varepsilon(v_0)$ — производная Фреше оператора $P_\varepsilon(v)$ в точке v_0 . Итерационный процесс (16) рассматривается в шаре $S(v_0, r) = \{\|v - v_0\|_2 \leq r\}$, где v_0 — нулевое приближение. Заметим, что элемент $v = [P'_\varepsilon(v_0)]^{-1} w$ есть решение линейной краевой задачи

$$\ddot{v}_t = \left(\frac{\partial F_\varepsilon^1}{\partial \dot{v}} \right) (\dot{v}_0, v_0, t) \dot{v}_t + \left(\frac{\partial F_\varepsilon^1}{\partial v} \right) (\dot{v}_0, v_0, t) v + w(t),$$

$$v(0) = v(\cos \varphi_0) = 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия Б. Пусть $\|P_\varepsilon(v_0)\| < c\varepsilon^{1/(2-\alpha)+\sigma}$, $\sigma > 0$.

Тогда итерационный процесс (16) для достаточно малых ε сходится в шаре $S(v_0, r)$, $r = c\varepsilon^{1/(2-\alpha)+\gamma}$, $0 < \gamma < \sigma$, и имеют место соотношения

$$|y(x, \varepsilon) - Y_n(x, \varepsilon)| < c(c\varepsilon^\gamma)^n, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $Y_n(x, \varepsilon) = v_n(t_n(x, \varepsilon), \varepsilon) \cos \varphi_0$, $t_n(x, \varepsilon)$ — корень уравнения $x = t \cos \varphi_0 - (v_n(t, \varepsilon) - (\operatorname{tg} \varphi_0)t) \sin \varphi_0$, $y(x, \varepsilon)$ — точное решение задачи (13). Константа c не зависит ни от ε , ни от n .

Мы не останавливаемся здесь на построении нулевого приближения, считая, что эта процедура проще для регулярно возмущенной задачи (15), чем для (13).

В заключение отметим, что в данном классе задач метод параметрической регуляризации приводит исходную сингулярно возмущенную задачу к регулярно возмущенной, дает возможность использовать итерационный метод и получить равномерную, а не асимптотическую скорость сходимости последовательных приближений.

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
22 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Ломов, ДАН, т. 177, № 6, 1273 (1967). ² М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, ДАН, т. 132, № 6, 1242 (1960). ³ Ю. П. Боголаев, ДАН, т. 216, № 2, 251 (1974). ⁴ А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач, М., «Наука», 1973. ⁵ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959.