

УДК 519.8+577.472(26)

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Е. И. СКАЛЕЦКАЯ, А. П. ШАПИРО

**ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОПУЛЯЦИЙ
ПРИ СЛУЧАЙНОМ ПОПОЛНЕНИИ**

(Представлено академиком А. А. Вороновым 2 XII 1975)

Риккер (¹) предложил следующую эмпирическую формулу, связывающую численности n -го и следующего поколений некоторой популяции рыб:

$$x_{n+1} = Ax_n \exp(-\alpha x_n), \quad (1)$$

где A, α — постоянные, описывающие воспроизводящую способность и выживаемость соответственно. Формула (1) хорошо согласуется с динамикой численности популяций лососевых.

В настоящей работе A считается случайной величиной с известной функцией распределения. Формулу (1) для случая эксплуатируемой популяции можно записать в форме

$$x_{n+1} = Ay_n \exp(-\alpha y_n), \quad (2)$$

где y_n — численность невыловленных рыб.

Прибыль от промысла естественно считать пропорциональной численности улова $x_n - y_n$.

В данной работе решается задача выбора оптимальной стратегии по критерию максимума функционала

$$\Phi(x) = E \left[\sum_{i=1}^{\infty} c(x_i - y_i) \beta^{i-1} \right], \quad (3)$$

где $0 < \beta < 1$, x — исходная численность популяции, $E(z)$ — математическое ожидание z .

Такая целевая функция естественно возникает при учете дохода от полученных прибылей (задача с дисконтированием).

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, возрастает при $0 < x < x_0$, убывает при $x > x_0$, $\varphi''(x) < 0$ в промежутке возрастания функции. Пусть, далее,

$$x_{n+1} = \xi \varphi(y_n), \quad (4)$$

где ξ — случайная величина с функцией распределения $A(t)$.

Тогда существует некоторое значение $y = y_0 \leq x_0$ такое, что стратегия, состоящая в изъятии на каждом шаге величины $[x_n - y_0]^+$, является оптимальной и доставляет максимум функционалу (3). Эта стратегия стационарна (не зависит от номера шага).

Для доказательства теоремы вводятся функции

$$f_n(x) = \max \left[\sum_{i=1}^n cE(x_i - y_i) \beta^{i-1} \right],$$

обозначающие максимальное математическое ожидание дохода за n лет при начальной численности x особей.

Функции $f_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$f_n(x) = T(f_{n-1}) = \max_{0 \leq y \leq x} \left\{ c(x-y) + \beta \int_0^{\infty} f_{n-1}[z\varphi(y)] dA(z) \right\}, \quad (5)$$

при этом $f_1(x) = cx$.

Оператор T в пространстве C является сжимающим, поскольку для любых функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ таких, что $|g_1(x) - g_2(x)|$ ограничен сверху, верны неравенства

$$\begin{aligned} T(g_1) - T(g_2) &= \max_{0 \leq y \leq x} \left\{ c(x-y) + \beta \int_0^{\infty} g_1[z\varphi(y)] dA(z) \right\} - \\ &\quad - \max_{0 \leq y \leq x} \left\{ c(x-y) + \beta \int_0^{\infty} g_2[z\varphi(y)] dA(z) \right\} \leq \\ &\leq \max_{0 \leq u \leq x} \left\{ \beta \int_0^{\infty} [g_1(z\varphi(y)) - g_2(z\varphi(y))] dA(z) \right\} \leq \beta \max_u |g_1(u) - g_2(u)|. \end{aligned}$$

Легко видеть, что разность $f_2(x) - f_1(x)$ ограничена по абсолютной величине, и, следовательно, согласно теореме о неподвижной точке Каччаполи — Банаха, $f_n(x)$ равномерно сходятся к некоторой функции $f(x)$. Все $f_n(x)$ — выпуклые монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие соотношению

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \beta \int_0^{\infty} f_n(z\varphi(x)) dA(z) & \text{при } x \leq y_{n+1}, \\ c(x - y_{n+1}) + \beta \int_0^{\infty} f_n(z\varphi(y_{n+1})) dA(z) & \text{при } x > y_{n+1}, \end{cases} \quad (6)$$

где $y_n \in (0, x_0)$ — оптимальное значение запаса при некотором n .

Последовательность y_n монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому существует $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq x_0$. Докажем, что значение y_0 определяет

оптимальную стратегию. Действительно, значение $\Phi(x)$ функционала (3) при использовании стационарной стратегии, описанной условием теоремы, удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x) = \begin{cases} \beta \int_0^{\infty} \Phi(z\varphi(x)) dA(z) & \text{при } x \leq y_0, \\ c(x - y_0) + \beta \int_0^{\infty} \Phi(z\varphi(y_0)) dA(z) & \text{при } x > y_0. \end{cases} \quad (7)$$

Переходя к пределу в соотношении (6), получим, что $f(x)$ удовлетворяет такому же уравнению, откуда

$$|\Phi(x) - f(x)| \leq \beta \max_u |\Phi(u) - f(u)|,$$

и, следовательно, $\Phi(x) = f(x)$. Отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Если в качестве критерия оптимальности выбрать средний доход, т. е. функционал

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - y_i), \quad (8)$$

то характер оптимальной стратегии не изменится. При этом оптимальное значение $y = \bar{y}$ может быть получено из $y_0(\beta)$ переходом к пределу при $\beta \rightarrow 1$.

2. Функция Риккера $\varphi(x) = x \exp(-\alpha x)$ удовлетворяет условиям теоремы, поэтому оптимальная стратегия облова риккеровской популяции также определяется некоторым критическим значением.

3. Использование критериев (3) и (8) автоматически приводит к сохранению эксплуатируемой популяции. При оптимизации дохода за n лет пришлось бы вводить ограничения на вылов, исключающие ее деградацию.

Использование полученных результатов для реальных объектов требует статистики запасов и пополнений за ряд лет, на основе которой определяется функция распределения ξ .

Для определения параметра α используется метод наименьших квадратов. При полученном α вычисляются значения ξ_i по формуле

$$\xi_i = \frac{x_{i+1}}{y_i} \exp(\alpha y_i).$$

Набор $\xi_1, \dots, \xi_m$ считается выборкой случайной величины. На ее основе вычисляется выборочная функция распределения.

Авторами были использованы данные за 30 лет Т. В. Егоровой ⁽²⁾ по одной из популяций камчатской нерки (семейство лососевых) и данные по Канадской популяции этого же вида, приведенные в книге А. А. Засосова ⁽³⁾. Значение параметра α для обеих популяций совпадало с точностью до третьего знака, а величина ξ несущественно отличалась от нормальной.

Был реализован на ЭВМ алгоритм определения y_0 и получено искомое критическое значение для обеих рассматриваемых реальных популяций — соответственно 1,5 млн и 1 млн особей. Для сравнения укажем, что оптимальный уровень эксплуатации этих популяций без учета случайного характера воспроизводства равен 1,2 млн и 0,8 млн особей.

Доказанная в работе теорема является естественным обобщением результата А. П. Шаниро ⁽⁴⁾ об оптимальном режиме вылова в детерминированном случае. Отметим, что при использовании критерия (3) аналогичный приведенной теореме результат оказывается верным и в том случае, когда случайным является параметр α или оба параметра одновременно.

Доказано существование оптимального значения и в случае перекрывающихся поколений рыб, но вычисление этого значения представляет значительные трудности, так как требуется итерация функций нескольких переменных.

Институт автоматики и процессов управления
с вычислительным центром
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР
Владивосток

Поступило
2 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ W. E. Ricker, J. Fish. Res. Canada, v. 11, № 5 (1954). ² Т. В. Егорова, Ф. В. Крогиус и др., Вопр. ихтиол., т. 1, № 3 (1961). ³ А. А. Засосов, Уравнения теории рыболовства и способы их решения, «Пищевая промышленность», 1969. ⁴ А. П. Шаниро, Биология моря, т. 1, № 3 (1975).