

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. К. АМОНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ НА ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В настоящей статье рассматривается следующая

Задача. Пусть $u(x, y, t)$ — функция, удовлетворяющая в цилиндре $\Pi: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq t < \infty$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

при условиях

$$u(x_k, 0, t) = f_{0k}(t), \quad u_x(x_k, 0, t) = f_{1k}(t), \quad (2)$$

$$u_y(x_k, 0, t) = f_{2k}(t), \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\int_0^\infty u^2(x, y, t) dt \leq C', \quad C' = \text{const.} \quad (4)$$

Здесь $\{x_k\} = N$ — бесконечное множество точек, лежащих на отрезке $[-1/4, 1/4]$ и имеющих хотя бы одну предельную точку, принадлежащую этому множеству $f_{ik}(t)$, $i=0, 1, 2$, — некоторые заданные непрерывные функции.

Требуется определить функцию $u(x, y, t)$ внутри Π . Обозначим через $\mathcal{D}$ круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Тогда имеет место

Теорема единственности. Если $f_{ik}(t) = 0$, $i=0, 1, 2$, то

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{для} \quad (x, y, t) \in \Pi.$$

Для доказательства этой теоремы сначала применяется преобразование Лапласа по t к уравнению (1), а затем при помощи некоторых преобразований уравнение (1) приводится к обобщенному уравнению Коши — Римана

$$G(w) = \partial_{\bar{z}} w + Aw + B\bar{w} = 0, \quad (5)$$

где

$$\partial_{\bar{z}} w = 1/2 (w_x + iw_y),$$

$$A = \frac{(2p)^{1/2}}{4} (1+i), \quad B = \frac{(2p)^{1/2}}{4} (1-i), \quad p = s + i\sigma,$$

решение которого удовлетворяет всем условиям теоремы Т. Карлемана ⁽¹⁾. Из этой теоремы вытекает единственность решения уравнения (5), следовательно, и уравнения (1). Затем получена оценка устойчивости решения задачи (1) — (4) при условии

$$\max_D \int_0^\infty |u|^2 dt \leq 1, \quad \max_D \int_0^\infty |\nabla u|^2 dt \leq 1; \quad (6)$$

$$\max_N \int_0^\infty |u|^2 dt \leq \varepsilon, \quad \max_N \int_0^\infty |\nabla u|^2 dt \leq \varepsilon \quad (7)$$

($\varepsilon > 0$ — малое число).

Мы знаем ⁽¹⁾, что решение обобщенного решения Коши — Римана (5) является обобщенно-аналитической функцией; оно имеет вид

$$w = \Phi \exp \omega(z, p), \quad (8)$$

где $\Phi \in U_0^*(\mathcal{D})$, $U_0^*(\mathcal{D})$ — класс аналитических функций от z ,

$$\omega(z, p) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{D}} \left[A(\xi) + B(\xi) \frac{\bar{w}(\xi)}{w(\xi)} \right] \frac{d\xi d\eta}{(\xi - z)}, \quad \xi = \xi + i\eta;$$

$\omega(z, p) \in C_\alpha(\mathcal{D})$, $C_\alpha(\mathcal{D})$ — множество всех ограниченных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$. Аналитическая функция $\Phi(z, p)$ удовлетворяет всем условиям известной теоремы ⁽²⁾. Поэтому на основании этой теоремы мы можем написать неравенство

$$|\Phi(z, p)| \leq s^{-1/2} [2^{1/2} + (s^2 + \sigma^2)^{1/4}] \exp \left\{ -(x+y) \operatorname{Re}(p/2)^{1/2} - \left(1 + \frac{\alpha(z)}{\ln \mu_n(N)} \right) \min_{\mathcal{D}} \operatorname{Re} \omega(z, p) + \frac{\alpha(z)}{\ln \mu_n(N)} \min_N \operatorname{Re} \omega(z, p) \right\},$$

зная, что

$$\max_{\mathcal{D}} |\Phi(z, p)| \leq s^{-1/2} [2^{1/2} + (s^2 + \sigma^2)^{1/4}] \exp [|\operatorname{Re} p^{1/2}| - \min_{\mathcal{D}} \operatorname{Re}(z, p)]$$

и

$$\max_N |\Phi(z, p)| \leq \varepsilon^{1/2} s^{-1/2} [2^{1/2} + (s^2 + \sigma^2)^{1/4}] \exp [|\operatorname{Re}(p/2)^{1/2}| - \min_N \operatorname{Re} \omega(z, p)],$$

где $\alpha(z)$ — некоторая непрерывная функция, $0 < \alpha(z) < 1$ при $|z| < 1$ и $\alpha(z) = 0$ при $|z| = 1$,

$$\mu_n(N) = \inf \left(\sum_k l_k \right),$$

где l_k — длина интервала Δ_k , а $L_n = \cup \Delta_k$ — система интервалов, содержащая множество N . Следовательно, после некоторых элементарных вычислений получим

$$|\bar{u}(x, y, p)| \leq C |\sigma|^{1/2} \exp [C_1(s^2 + \sigma^2)] e^{-\alpha(z)/[2 \ln \mu_n(N)]},$$

где $\bar{u}(x, y, p)$ — преобразование Лапласа от функции $u(x, y, t)$.

Для функции $u(x, y, t)$ оценка получена в виде

$$|u(x, y, t)| \leq C_2 \exp(s_0 t) \left(C_3 + s_0 t + \frac{\alpha(z)}{2 \ln \mu_n(N)} \ln \varepsilon \right)^{-\delta},$$

где C, C_1, C_2, C_3, s_0 — положительные постоянные и $\delta \geq 2$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
24 II 1976

Новосибирск
Самаркандский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² М. М. Лавренцев, Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Спецкурс для студентов НГУ, Новосибирск, 1973.