Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

УДК 539.12

Матричный элемент распада мезона в лептонную пару

В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином J в лептонную пару с учетом кварковой структуры.
Ключевые слова: лептон, мезон, пуанкаре-инвариантная квантовая механика, волновая функция, кварк.

The paper presents a technique to obtain the matrix element of meson decay with J arbitrary spins into a lepton pair in view of the quark structure.
Keywords: lepton, meson, Poincare-invariant quantum mechanics, wave function, quark.

Введение

Исследования электрослабых распадов адронов всегда были источником информации о взаимодействии кварков. Сегодня электрослабые распады адронов, которые содержат тяжелые кварки, дают возможность измерять параметры Стандартной Модели (СМ), а также служат для поисков эффектов новой физики, т. е. физики вне СМ. В частности, адронные распады позволяют определить элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава, углы смешивания. Лептонные распады псевдоскалярных мезонов в моделях с двумя заряженными хиггсовскими бозонами становятся чувствительными к массам этих бозонов [1].

Вычисления лептонных распадов мезонов с учетом их кварковой структуры проделаны в различных подходах таких, как решеточные модели [2]–[9], модели, основанные на правилах сумм в КХД (см., например, [10]–[12]), и в моделях, использующих конституэнтную кварковую модель ([13]–[21], см. также обзор [22] и ссылки в нем). Результаты таких вычислений значительно отличаются друг от друга, и теоретические неопределенности расчетов достаточно велики. Кроме этого, для мезонов с тяжелым и легким кварком (B, B_s, D, D_s-мезоны) важно учитывать и релятивистские эффекты, которыми часто пренебрегают. Таким образом, развитие новых подходов, учитывающих релятивизм кварков и уменьшающих теоретические неопределенности вычислений лептонных распадов, актуально и в настоящее время.

Цель данной работы – разработка методики вычисления распада мезона в лептонную пару с учетом его кварковой структуры. Для описания составных релятивистских систем используется наиболее простое обобщение обычной квантовой механики – релятивистская гамильтонова динамика (РГД) или пуанкаре-инвариантная квантовая механика [24], [25][1].

Матричный элемент распада $h(q\bar{Q}) \to \ell_1 + \ell_2$

Реакция распада мезона h в лептонную пару ℓ_1, ℓ_2

$$h \to \ell_1 + \ell_2 \tag{1}$$

характеризуется S-матричным элементом

$$M\left(h \to \ell_1 \ell_2\right) = {}_{out}\left\langle \ell_1, \ell_2 \left| S - I \right| \Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu} \right\rangle_{in}. \tag{2}$$

Здесь вектор

$$\left| \Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu} \right\rangle \tag{3}$$

определяет состояние мезона спина J, массы M и импульса $\mathbf{Q}$ в представлении Гейзенберга [23].

[1]Объем данной работы не позволяет даже кратко характеризовать имеющиеся в настоящее время модели для описания связанных систем. Описание некоторых подходов можно найти, например, в [26].

В данной работе будем рассматривать мезон h как релятивистскую составную систему кварка q и антикварка $\bar{Q}$ в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [24], [25].

В таком подходе процесс распада (1) обусловлен взаимодействием кварков, входящих в мезон h. Поскольку при расчетах реакций с фермионами наиболее эффективным является использование спиральных состояний, а для описания связанных систем «хорошими» квантовыми числами являются орбитальный момент относительного движения ℓ и полный спиновой момент S, необходимо найти связь между вектором состояния (3) и векторами состояния пары $q\bar{Q}$ с учетом этих требований.

Пуанкаре-инвариантная квантовая механика дает возможность связать вектор состояния мезона (2) с векторами состояний входящих в него кварков на основе представлений группы Пуанкаре. Главным требованием пуанкаре-инвариантной квантовой механики является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц.

Схема решения поставленной задачи состоит в следующем: на первом этапе строится базис прямого произведения двух частиц без учета взаимодействия. В случае системы двух частиц с массами m_q и m_Q и, соответственно, с 4-импульсами $p_1 = \left(\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1\right)$ и $p_2 = \left(\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2\right)$ этот базис

$$\left|\mathbf{p}_1, \lambda_1\right\rangle \left|\mathbf{p}_2, \lambda_2\right\rangle \equiv \left|\mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2\right\rangle \tag{4}$$

определяет приводимое представление группы Пуанкаре.

На втором этапе с помощью разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре (см., например, [27], [28], [29]) строится базис неприводимого представления, который характеризует систему целиком. Для этого введем полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \tag{5}$$

и относительный импульс $\mathbf{k}$ двух частиц

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0\left(\omega_{M_0}(P) + M_0\right)}\left(m_Q^2 - m_q^2 - M_0\left[\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)\right]\right) \tag{6}$$

с

$$M_0 = \sqrt{\left[\omega_{m_Q}(p_2) + \omega_{m_q}(p_1)\right]^2 - \mathbf{P}^2}\,.$$

Базис двухчастичного неприводимого представления определяется квантовыми числами полного импульса (5), полного углового момента J, его проекцией μ, эффективной массой невзаимодействующих частиц

$$M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k) \tag{7}$$

или $k = |\mathbf{k}|$, а также двумя дополнительными числами, которые снимают вырождение данного базиса.

В зависимости от выбора чисел, снимающих вырождение, различают две схемы: схема с «L-S» связью с квантовыми числами орбитального момента относительного движения ℓ и полного спинового момента S и схема «спиральность» с пуанкаре-инвариантными спиральностями $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ [28]. В системе центра инерции $(\mathbf{P} = 0)$ числа $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ совпадают с обычными спиральностями фермионов.

В схеме «спиральность» разложение Клебша-Гордана группы Пуанкаре имеет вид [28]:

$$|\mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\omega_{m_Q}(p_2)M_0}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)\omega_{M_0}(P)}}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\int d^2\hat{\mathbf{k}}\; D^{*J}_{\mu,\lambda}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)\left|\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\right\rangle \tag{8}$$

с $\lambda = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$. Функция $D^J_{\mu\lambda}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ индекса J. Явный вид матрицы D определяется через сферические углы вектора относительного движения (6) $\hat{\mathbf{k}} = \{\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k\}$.

На третьем этапе от системы без взаимодействия переходят к одночастичному базису связанной системы (3) путем добавления в один из операторов полного набора базиса (8) оператора взаимодействия. Требование сохранения пуанкаре-инвариантности в рамках точечной и мгновенной форм РГД приводит к появлению волновой функции (ВФ) связанной системы Φ :

$$\left\langle \mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \middle| \Psi_{\mathbf{Q},M,J'\mu'} \right\rangle = \delta(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\delta_{J'J}\delta_{\mu'\mu}\Phi^{J\mu}_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}(k). \tag{9}$$

Нормировка ВФ (9) с учетом числа цветов кварков N_c следует из нормировки векторов состояний и имеет вид

$$N_c\int_0^\infty dk\, k^2\left|\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\right|^2 = 1. \tag{10}$$

Использование соотношения, связывающего вектор состояния в схеме с «L-S» связью с вектором состояния в схеме «спиральность» [28], [30]

$$|\,\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, S\rangle = \sum_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2J+1}}\,C^{\,s_1\ \ \ s_2\ \ \ S}_{\,\tilde{\lambda}_1\ -\tilde{\lambda}_2\ \lambda}\,C^{\,\ell\ \ S\ \ J}_{\,0\ \ \lambda\ \ \lambda}\,|\,\mathbf{P}, k, J\mu, \tilde{\lambda}_1, -\tilde{\lambda}_2\rangle, \tag{11}$$

где $C^{\,s_1\ s_2\ S}_{\,\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda}$ – коэффициенты Клебша-Гордана, приводит к следующему результату:

$$|\,\Psi_{\mathbf{P},J\mu,M}\rangle = \int_0^\infty dk\, k^2\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\omega_{m_2}(p_2)M_0}{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_2}(k)\omega_{M_0}(P)}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\times$$

$$\times\sum_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} C^{\,1/2\ \ \ 1/2\ \ \ S}_{\,\tilde{\lambda}_1\ \ -\tilde{\lambda}_2\ \ \lambda}\,C^{\,\ell\ \ S\ \ J}_{\,0\ \ \lambda\ \ \lambda}\int d^2\mathbf{k}\, D^{*J}_{\mu\lambda}(\phi_k,\theta_k,-\phi_k)\left|\mathbf{p}_1,\tilde{\lambda}_1,\mathbf{p}_2,\tilde{\lambda}_2\right\rangle. \tag{12}$$

Подставляя (12) в матричный элемент (2), после ряда упрощений в системе покоя мезона $(\mathbf{P}=0)$ находим, что

$$M(h\to\ell_1\ell_2) = \sum_{a=1}^{N_c}\int_0^\infty dk k^2\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sum_{\lambda_1,\lambda_2} C^{\,1/2\ \ \ 1/2\ \ \ S}_{\,\lambda_1\ \ -\lambda_2\ \ \lambda}\,C^{\,\ell\ \ S\ \ J}_{\,0\ \ \lambda\ \ \lambda}\times$$

$$\times\int d^2\mathbf{k}\, D^{*J}_{\mu\lambda}(\phi_k,\theta_k,-\phi_k)_{out}\langle \ell_1,\ell_2|S-I\left|\mathbf{k},\lambda_1;-\mathbf{k},\lambda_2,a\right\rangle_{in}. \tag{13}$$

Здесь уже λ_1 и λ_2 – спиральности кварка и антикварка, а волновая функция мезона определяется «хорошими» квантовыми числами ℓ и S, которые, в свою очередь, задают значения операторов P, C и G-четности.

Таким образом, матричный элемент распада мезона спина J в лептонную пару выражается через матричный элемент субпроцесса с участием кварков, входящих в этот мезон $M\left(q\bar{Q}\to\ell_1\ell_2\right)$.

Пример: распад $\pi^-\left(d\bar{u}\right)\to e^- + \bar{\nu}_e$

Для демонстрации методики рассмотрим процесс лептонного распада псевдоскалярного мезона $\pi^-\left(d\bar{u}\right)\to e^-(q_1,\sigma_1)+\bar{\nu}_e(q_2,\sigma_2)$ в стандартной теории электрослабого взаимодействия. Поскольку для пиона $J=S=\ell=0$, то выражение (13) существенно упрощается

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}\left(\pi^-\to e^-\nu_e\right) = \sum_{a=1}^{N_c}\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\int_0^\infty dk k^2\Phi_\pi(k)\int d^2\mathbf{k}\sum_\lambda \lambda M^{\sigma_1,\sigma_2}_{\lambda,\lambda}\left(d\bar{u}\to e^-\nu_e\right). \tag{14}$$

В борновском приближении субпроцесс с участием кварков определяется диаграммой с обменом заряженным W-бозоном. Матричный элемент, соответствующий данному субпроцессу, можно записать в виде

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}_{\lambda,\lambda}\left(d\bar{u}\to e^-\nu_e\right) = \frac{\sqrt{2}\,V_{ud}N_cG_F}{(2\pi)^3\sqrt{\omega_{m_d}(k)\omega_{m_u}(k)}}\frac{M_W^2}{M_W^2-M_\pi^2}\times$$

$$\times\bar{\upsilon}_\lambda(-\mathbf{k},m_u)\gamma_\mu\,\omega_- u_\lambda(\mathbf{k},m_d)\,\bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q},m_e)\gamma^\mu\,\omega_-\upsilon_{\sigma_2}(-\mathbf{q},0), \tag{15}$$

где V_{ud} – элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава; M_W – масса W-бозона; M_π – масса π^--мезона; $\omega_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$ – проективная матрица; а m_u и m_d – массы u и d-кварков соответственно.

В выражении (15) учтена кинематика двухчастичного распада, а именно, что

$$q_1 + q_2 = M_{\pi^-}, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}, \tag{16}$$

а также, что постоянная тонкой структуры α, синус угла Вайнберга s_W и константа Ферми G_F связаны соотношением

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} s_W^2 M_W^2 G_F}{\pi}. \tag{17}$$

Подстановка (15) в матричный элемент (14) приводит к выражению

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}\left(\pi^- \to e^- \nu_e\right) = \frac{\sqrt{2}\, V_{ud} N_c G_F}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \frac{M_W^2}{M_W^2 - M_\pi^2} \times$$

$$\times \bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q}, m_e) \gamma^\mu\, \omega_- \upsilon_{\sigma_2}(-\mathbf{q}, 0) \int_0^\infty dk \frac{k^2 \Phi_\pi(k)}{\sqrt{\omega_{m_d}(k)\, \omega_{m_u}(k)}} \int d^2\mathbf{k} \sum_\lambda \lambda \bar{\upsilon}_\lambda(-\mathbf{k}, m_u) \gamma_\mu\, \omega_- u_\lambda(\mathbf{k}, m_d). \tag{18}$$

Таким образом, соотношение (18) позволяет рассчитать матричный элемент лептонного распада $\pi^-(d\bar{u}) \to e^- + \bar{\nu}_e$ с учетом кварковой структуры π^--мезона. Фермионные токи, входящие в (18), можно рассчитать на основе метода базисных спиноров, развитого одним из авторов в [31], [32].

Волновая функция мезона $\Phi(k)$ находится из уравнения пуанкаре-инвариантной механики [24]:

$$\sum_{\ell', S'} \int_0^\infty V^J_{\ell,S;\ell',S'}\left(k, k'\right) \Phi^{J\mu}_{\ell',S'}\left(k'\right) k'^2 dk' = \left(M - M_0\right) \Phi^{J\mu}_{\ell,S}\left(k\right), \tag{19}$$

где $V^J_{\ell,S;\ell',S'}\left(k, k'\right)$ – матричный элемент феноменологического потенциала межкваркового взаимодействия V.

Заключение

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином J в лептонную пару с учетом кварковой структуры. Двухчастичная релятивистская связанная система $q\bar{Q}$ описывается на основе пуанкаре-инвариантной квантовой механики (или РГД), что позволяет сделать задачу расчета замкнутой. Авторы планируют применить развитую методику для расчета редких лептонных распадов мезонов.

Литература

1. Hou, W.-S. Enhanced charged Higgs boson effects in B- $\to$ tau anti- neutrino, mu anti-neutrino and b $\to$ tau anti-neutrino + X / W.-S. Hou // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D48. – P. 2342–2344.

2. Quenched heavy light decay constants / R.M. Baxter [et al.] // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D49. – P. 1594–1605.

3. B-meson decay constants from NRQCD / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Lett. – 1998. – Vol. B427. – P. 132–140.

4. Lattice determination of heavy-light decay constants / C.W. Bernard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 4812–4815.

5. Non-perturbatively improved heavy-light mesons: Masses and decay constants / D. Becirevic [et al.] // Phys. Rev. – 1999. – Vol. D60. – P. 074501.

6. Draper, T. Status of heavy quark physics on the lattice / T. Draper // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 1999. – Vol. 73. – P. 43–57.

7. B-meson decay constant from two-flavor lattice QCD with non-relativistic heavy quarks / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. D64. – P. 054504.

8. Decay constants of B and D mesons from improved relativistic lattice QCD with two flavours of sea quarks / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. D64. – P. 034505.

9. Lattice results for the decay constant of heavy-light vector mesons / C. Bernard [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 014510.

10. Narison, S. Extracting m-bar(c)(M(c)) and f(D/s, B) from the pseudoscalar sum rules / S. Narison // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 1999. – Vol. 74. – P. 304–308.

11. Jamin, M. f(B) and f(B/s) from QCD sum rules / M. Jamin, B.O. Lange // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 056005.

12. Penin, A.A. Heavy-light meson decay constant from QCD sum rules in three-loop approximation / A.A. Penin, M. Steinhauser // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 054006.

13. Colangelo, P. Relativistic bound-state effects in heavy-meson physics / P. Colangelo, G. Narduli, M. Pietroni // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D43, N9. – P. 3002–3010.

14. Ivanov, M.A. Leptonic and semileptonic decays of pseudoscalar mesons / M.A. Ivanov, P. Santorelli // Phys. Lett. – 1999. – Vol. B456. – P. 248–255.

15. Ciftci, H. Meson decay in an independent quark model / H. Ciftci, H. Koru // Int. J. Mod. Phys. – 2000. – Vol. E9. – P. 407–416.

16. Melikhov, D. Weak form factors for heavy meson decays: An update / D. Melikhov, B. Stech // Phys. Rev. – 2000. – Vol. D62. – P. 014006.

17. Decay constants of heavy meson of 0- state in relativistic Salpeter method / G. Cvetic, C.S. Kim, G.-L. Wang, W. Namgung // Phys. Lett. – 2004. – Vol. B596. – P. 84–89.

18. Weak decay constant of pseudoscalar mesons in a QCD-inspired model / L.A.M. Salcedo, J.P.B.C. de Melo, D. Hadjmichef, T. Frederico // Braz. J. Phys. – 2004. – Vol. 34. – P. 297–299.

19. Ebert, D. Decay constants of heavy-light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Mod. Phys. Lett. – 2002. – Vol. A17. – P. 803–808.

20. Leptonic decay constants f(D/s) and f(D) in three flavor lattice QCD / J.N. Simone [et al.] // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 2005. – Vol. 140. – P. 443–445.

21. Ebert, D. Relativistic treatment of the decay constants of light and heavy mesons / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Phys. Lett. – 2006. – Vol. B635. – P. 93–99.

22. Richman, J.D. Leptonic and semileptonic decays of charm and bottom hadrons / J.D. Richman, P.R. Burchat // Rev. Mod. Phys. – 1995. – Vol. 67. – P. 893–976.

23. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

24. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

25. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.

26. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантово-полевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.

27. Широков, Ю.М. Релятивистская теория поляризационных эффектов / Ю.М. Широков // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, 4. – С. 1005–1011.

28. Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – М. : Атомиздат, 1969. – 442 с.

29. Новожилов, Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – М. : Наука, 1972. – 472 с.

30. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.

31. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.

32. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 29.08.12