

А. В. БУХВАЛОВ

ФАКТОРИЗАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРИМЕР РЕФЛЕКСИВНОЙ БАНАХОВОЙ РЕШЕТКИ БЕЗ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 6 XI 1975)

В 1972 г. П. Энфлю ⁽¹⁾ построил пример сепарабельного рефлексивного банахова пространства без свойства аппроксимации; с тех пор появился ряд работ, посвященных уточнению и усовершенствованию его конструкции ⁽²⁻⁴⁾. Однако все построенные пространства не удавалось каким-либо образом превратить в банахову решетку. Лишь совсем недавно А. Шанковскому удалось построить пример банаховой решетки без свойства аппроксимации, но банахова решетка в этом примере не являлась рефлексивным банаховым пространством. Ниже, опираясь на существование банаховой решетки, построенной А. Шанковским, построен пример сепарабельной рефлексивной банаховой решетки без свойства аппроксимации, а следовательно, и без базиса. Отметим, что результата о сведении проблемы аппроксимации к рефлексивному случаю (как это имеет место в классе всех банаховых пространств ⁽⁵⁾) в классе банаховых решеток не было известно. В п. 1 устанавливается теорема о факторизации компактных операторов в банаховых решетках (конструкция ⁽⁵⁾ на этот случай не переносится), которая далее применяется для построения указанного выше примера.

1. Факторизация компактных операторов. Напомним сначала одну конструкцию из ⁽⁶⁾. Пусть W — абсолютно выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства $(E, \|\cdot\|)$. Для $n=1, 2, \dots$ обозначим через $\|\cdot\|_n$ норму на E , являющуюся функционалом Минковского множества

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} B_E, \quad B_E = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}.$$

Для любого $x \in E$ положим

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2 \right)^{1/2}; \quad G = \{x \in E: \|x\| < \infty\}.$$

Тогда $(G, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, непрерывно вложенное в E . В ⁽⁶⁾ доказано, что G рефлексивно тогда и только тогда, когда W относительно слабо компактно.

Лемма 1. На множестве W топологии пространства E и G совпадают.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что если $x_m, x \in W, \|x_m - x\| \rightarrow 0$, то существует $\{x_{m_n}\}: \|x_{m_n} - x\| \rightarrow 0$. Возьмем последовательность $\lambda_m \uparrow +\infty$, для которой $\lambda_m \|x_m - x\| \rightarrow 0$. Для $n=1, 2, \dots$ найдем $m_n, m_1 < m_2 < \dots$, так, что выполнено $\lambda_{m_n} \|x_{m_n} - x\| < 2^{-2^n}$. Тогда при $p \leq n$ имеем $\|x_{m_n} - x\|_p \leq (\lambda_{m_n} 2^p)^{-1}$. Так как $x_m, x \in W$, то при $p > n$ воспользуемся оценкой

$$\|x_{m_n} - x\|_p \leq 2^{-p+1}.$$

Тогда

$$\|x_{m_n} - x\|^2 = \sum_{p=1}^n \|x_{m_n} - x\|_p^2 + \sum_{p=n+1}^{\infty} \|x_{m_n} - x\|_p^2 < \lambda_{m_n}^{-2} + \sum_{p=n+1}^{\infty} 2^{-2p+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть далее E — банахово KN -пространство (т. е. K -пространство с монотонной нормой ⁽⁷⁾), в котором выполнено условие (А): $x_n \downarrow 0$ влечет $\|x_n\| \rightarrow 0$. Для множества $M \subset E$ определим солидную оболочку

$$\text{sol}(M) = \{x \in E: \exists y \in M, \text{ для которого } |x| \leq |y|\}.$$

Множество M называется солидным, если $M = \text{sol}(M)$. Выпуклая солидная оболочка M получается по формуле $\text{sol}(\text{co}(M))$, где $\text{co}(M)$ — выпуклая оболочка. Салидное множество, являющееся векторным подпространством в E , называется идеалом в E .

Лемма 2. Если K — компакт в E , то множество $W = \text{sol}(\text{co}(K))$ относительно слабо компактно в E .

Доказательство. Пусть $E_n \sim$ — пространство порядково непрерывных (= вполне линейных ⁽⁷⁾) функционалов на E ; $\pi: E \rightarrow (E_n \sim)_n$ — естественное вложение. Тогда

$$\pi(W) = \text{sol}(\text{co}(\pi(K)))$$

и в силу ⁽⁸⁾ $\pi(W)$ относительно компактно в слабой топологии $\sigma((E_n \sim)_n \sim, E_n \sim)$. Так как в E выполнено условие (А), то $E_n \sim$ совпадает с банаховым сопряженным E^* , и нам осталось показать, что если $\{x_\alpha\}$ — направление в W и $\pi x_\alpha \rightarrow F(\sigma((E_n \sim)_n \sim, E_n \sim))$, то $F \in \pi(E)$. Для каждого x_α найдется $y_\alpha \in \text{co}(K): |x_\alpha| \leq |y_\alpha|$. В силу относительной компактности множества $\text{co}(K)$ существует поднаправление $y_\beta \rightarrow y$ по норме в E . Легко видеть, что $|F| \leq |\pi y|$, откуда $F \in \pi(E)$.

Лемма 3. Если K — компакт в E , то существует рефлексивное банахово KN -пространство $G \supset K$, являющееся идеалом в E , причем K является компактом в G .

Доказательство. В силу леммы 2 множество $W = \text{sol}(\text{co}(K))$ относительно слабо компактно в E . Так как множества W и B_E солидны, то солидны и множества U_n , а тогда монотонны нормы $\|\cdot\|_n$ и $\|\cdot\|$. Таким образом, в силу леммы 1 и цитированного результата из ⁽⁶⁾, $(G, \|\cdot\|)$ — требуемое пространство.

Из леммы 3 получается

Теорема 1. Пусть E — банахово KN -пространство с условием (А), X — банахово пространство; $U: X \rightarrow E$ — компактный (линейный) оператор.

Тогда существует рефлексивное банахово KN -пространство G , являющееся идеалом в E , такое, что $U(X) \subset G$ и оператор $U: X \rightarrow G$ компактен.

Теорема 2. В любом банаховом KN -пространстве E с условием (А) без свойства аппроксимации существует идеал, являющийся рефлексивным банаховым KN -пространством без свойства аппроксимации.

Доказательство. Так как в E не выполнено свойство аппроксимации, то найдутся банахово пространство X и компактный оператор $U: X \rightarrow E$, который не приближается конечномерными операторами по норме. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда в пространстве G , построенном по оператору в силу теоремы 1, выполнено условие аппроксимации. Следовательно, найдется последовательность конечномерных операторов $U_n: X \rightarrow G$, сходящихся к U по норме. Но тогда U_n , рассматриваемые как операторы из X в E , сходятся к U по норме, чем и получено противоречие.

2. Пример сепарабельной рефлексивной банаховой решетки без аппроксимации. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p$; $\mathfrak{A}$ — некоторая совокупность измеримых подмножеств $[0, 1]$ положительной меры

Лебега μ такая, что

$$\sup\{\chi_A: A \in \mathfrak{A}\} = \chi_{[0,1]}, \quad \inf\{\mu(A): A \in \mathfrak{A}\} = 0.$$

Рассмотрим пространство $L(p, \alpha, \mathfrak{A})$, состоящее из всех измеримых функций $x(t)$ на $[0, 1]$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \frac{(\int_A |x(t)|^p dt)^{1/p}}{\mu(A)^\alpha}.$$

Обозначим через $X(p, \alpha, \mathfrak{A})$ замыкание $L^\infty[0, 1]$ в $L(p, \alpha, \mathfrak{A})$. Как показал Г. Я. Лозановский, в пространствах $L(p, \alpha, \mathfrak{A})$ не выполнено условие (A) и, следовательно, они несепарабельны. С другой стороны, из оценки $\|\chi_B\| \leq \mu(B)^{(1-\alpha p)/p}$ получаем, что в $X(p, \alpha, \mathfrak{A})$ выполнено условие (A) и, следовательно, это пространство сепарабельно.

Теорема 3. Для любых p и α можно так выбрать семейство $\mathfrak{A}$, что в пространствах $X(p, \alpha, \mathfrak{A})$ и $L(p, \alpha, \mathfrak{A})$ не выполнено свойство аппроксимации.

А. Шапковский докладывал этот результат для пространства $L(1, 1/2, \mathfrak{A})$ на конференции в Дюраме, Англия, в июле 1975 г. Доказательство теоремы 3 лишь в деталях отличается от доказательства А. Шапковского.

Из теорем 2 и 3 получается

Теорема 4. В пространстве $X(p, \alpha, \mathfrak{A})$ без свойства аппроксимации существует идеал, являющийся сепарабельным рефлексивным банаховым KN -пространством без свойства аппроксимации.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Enflo, Acta Math., v. 130, № 3-4, 309 (1973). ² А. Пелчинский, Т. Фигель, УМН, т. 28, № 6, 95 (1973). ³ A. M. Davie, Bull. Lond. Math. Soc., v. 5, 261 (1973). ⁴ Б. С. Митягин, Тр. VI зимней школы по матем. программированию и смежным вопросам (г. Дрогобыч, январь 1973), М., 1975, стр. 7. ⁵ T. Figiel, Studia math., v. 45, № 2, 191 (1973). ⁶ W. T. Davis, T. Figiel et al., J. Funct. Anal., v. 17, № 3, 311 (1974). ⁷ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. ⁸ I. Amemiya, Proc. Intern. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 1961, p. 14.