

УДК 681.325.6

МАТЕМАТИКА

Ю. А. МАМАТОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ АЛГОРИТМА ЯБЛОНСКОГО — КВАЙНА — МАК-КЛАСКИ В ЗАДАЧЕ О ПОИСКЕ КРАТЧАЙШЕГО ПОКРЫТИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 III 1976)

В предлагаемой статье исследуется задача о поиске кратчайшего покрытия таблицы Квайна с одинаковыми весами всех строк. Получена средняя мощность кратчайших покрытий и средняя мощность покрытий, даваемых алгоритмом Яблонского — Квайна — Мак-Класки по всем таблицам Квайна различной длины и состоящих из вектор-строк, содержащих определенное число единиц. Ввиду того, что отмеченные две величины в асимптотике совпадают, указанный алгоритм можно считать асимптотически оптимальным по отношению к указанному классу матриц.

Перейдем к изложению полученных результатов. Пусть имеется множество $H(m) = \{h_0, \dots, h_{2^m-1}\}$, содержащее все двоичные векторы длины m . Предполагается, что

$$h_j = \langle h_{j1}, \dots, h_{jm} \rangle, \quad h_{ji} \in \{0, 1\}, \quad i=1, \dots, m, j=0, \dots, 2^m-1.$$

Определение 1. Нормой вектора h_j называется величина

$$\|h_j\| = \sum_{i=1}^m h_{ji}.$$

Определим множество $H^{\rho, \nu}(m)$ следующим образом ($0 \leq \rho \leq \nu \leq m$, $\rho \leq m-2$, $\nu \geq 2$):

$$(\forall h_j \in H^{\rho, \nu}(m)) (\rho \leq \|h_j\| \leq \nu),$$

после чего образуем множество всех подмножеств множества $H^{\rho, \nu}(m)$, которое обозначим через $R(\rho, \nu, m)$. Представим $R(\rho, \nu, m)$ в виде

$$R(\rho, \nu, m) = R^1(\rho, \nu, m) \cup R^2(\rho, \nu, m), \quad R^1(\rho, \nu, m) \cap R^2(\rho, \nu, m) = \emptyset;$$

здесь $R^1(\rho, \nu, m)$ и $R^2(\rho, \nu, m)$ — множества всех покрывающих и непокрывающих подмножеств соответственно. Так как

$$(\forall \theta \in R^1(\rho, \nu, m)) (\mu(\psi(\theta)) \in]m/\nu[, \dots, m-\rho+\text{sign}(\rho))$$

и

$$(\forall \theta \in R^1(\rho, \nu, m)) (\mu(\tilde{A}_\psi(\theta)) \in]m/\nu[, \dots, m-\rho+\text{sign}(\rho))$$

(через $\psi(\theta)$ и $\tilde{A}_\psi(\theta)$ обозначены кратчайшее покрытие и покрытие, даваемое алгоритмом Яблонского — Квайна — Мак-Класки — $\tilde{A}_\psi$ (¹⁻³)), то справедливо представление

$$R^1(\rho, \nu, m) = \bigcup_{j=1}^{m-\rho+\text{sign}(\rho)} R_j^1(\rho, \nu, m),$$

$$R_i^1(\rho, \nu, m) \cap R_j^1(\rho, \nu, m) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$R^1(\rho, \nu, m) = \bigcup_{j=1}^{m-\rho+\text{sign}(\rho)} \tilde{R}_j^1(\rho, \nu, m),$$

$$\tilde{R}_j^1(\rho, \nu, m) \cap \tilde{R}_i^1(\rho, \nu, m) = \emptyset, \quad i \neq j;$$

здесь

$$\begin{aligned} (\forall \vartheta \in R_j^1(\rho, v, m)) \quad (\mu(\psi(\vartheta)) = j), \\ (\forall \vartheta \in \tilde{R}_j^1(\rho, v, m)) \quad (\mu(\tilde{A}_\Psi(\vartheta)) = j), \end{aligned}$$

через $\mu(C)$ обозначена мощность множества C .

Введем в рассмотрение случайные величины ξ_v и $\tilde{\xi}_v$ такие, что

$$P(\xi_v = j) = \frac{\mu(R_j^1(\rho, v, m))}{\mu(R^1(\rho, v, m))}, \quad P(\tilde{\xi}_v = j) = \frac{\mu(\tilde{R}_j^1(\rho, v, m))}{\mu(R^1(\rho, v, m))},$$

$$j \in \{]m/v[,]m/v[+ 1, \dots, m - \rho + \text{sign}(\rho) \}.$$

Определение 2. Алгоритм $\tilde{A}_\Psi$ называется асимптотически статистически $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ оптимальным в диапазоне $\sigma_1(m) \leq v \leq \sigma_2(m)$ при $m \rightarrow \infty$, если

$$M[\tilde{\xi}_v] - M[\xi_v] \leq \varepsilon_1.$$

$$|D[\tilde{\xi}_v] - D[\xi_v]| \leq \varepsilon_2,$$

при выполнении условий $m \rightarrow \infty$ и $\sigma_1(m) \leq v \leq \sigma_2(m)$.

Учтем теперь, что m можно представить в виде $m = [m/v]v + \tilde{v}$, после чего сформулируем основные результаты настоящей заметки.

Теорема 1. Если $m \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ так, что

$$\log_2(\log_2 m^3) \leq v \leq m, \quad \tilde{v} = 0,$$

то

$$1) M[\tilde{\xi}_v] = m/v + 0,5 + o(1);$$

$$2) D[\tilde{\xi}_v] = 0,25 + o(1);$$

3) пусть $M(v, m)$ ($M(v, m) \subset R^1(\rho, v, m)$) — множество матриц $W_n^v(m)$ таких, что

$$\mu(\tilde{A}_\Psi(W_n^v(m))) - \mu(\psi(W_n^v(m))) \leq 1$$

и $m \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ так, что

$$\log_2(\log_2 m) \leq v \leq m;$$

тогда

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty \\ \log_2(\log_2 m) \leq v \leq m}} \frac{\mu(M(v, m))}{\mu(R^1(\rho, v, m))} = 1.$$

Теорема 2. Алгоритм Яблонского — Квайна — Мак-Класки (алгоритм $\tilde{A}_\Psi$) асимптотически статистически $(1/2, 1/4)$ -оптимален в диапазоне $\log_2(\log_2 m^3) \leq v \leq m$ при $m \rightarrow \infty$ и $\tilde{v} = 0$.

Теорема 3. Если $m \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, $\tilde{v} \neq 0$, и при этом выполняются соотношения

$$C_{v+\tilde{v}}^v \begin{matrix} v \leq m, \\ \gtrsim \log_2 m^3, \end{matrix}$$

то

$$\begin{aligned} M[\tilde{\xi}_v] &=]m/v[+ o(1), \\ D[\tilde{\xi}_v] &= o(1). \end{aligned}$$

Теорема 4. При $m \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, $\tilde{v} = 0$ алгоритм Яблонского — Квайна — Мак-Класки асимптотически статистически $(0, 0)$ -оптимален в диапазоне v , определяемом соотношениями

$$\begin{aligned} v &\leq m, \\ \log_2 m^3 &\lesssim C_{v+\tilde{v}}^v. \end{aligned}$$

Теорема 5. Если $m \rightarrow \infty$, $2 \leq v < C = \text{const}$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\tilde{\xi}_v \sim \frac{m}{v} [1 + o(1)]\right) = 1,$$

$$M[\tilde{\xi}_v] \leq \frac{m}{v} + (v-1) \frac{1}{e} \cdot 4^{1/v} (\log_2 m)^{1/v},$$

$$D[\tilde{\xi}_v] \leq \left\{ (v-1) \frac{1}{e} \cdot 4^{1/v} (\log_2 m)^{1/v} \right\}^2.$$

Теорема 6. При $m \rightarrow \infty$, $2 \leq v < C = \text{const}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M[\tilde{\xi}_v]}{M[\tilde{\xi}_v]} = 1.$$

В заключение статьи приведем еще один результат, устанавливающий, что, несмотря на асимптотическую оптимальность в среднем алгоритма $\tilde{A}_\Psi$, существуют такие «плохие» матрицы $W(n, m)$, для которых справедлива

Теорема 7. Существуют матрицы $W(n, m) = \|\omega_{ij}\|_{n \times m}$ такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\bar{\mu}(\tilde{A}_\Psi[W(n, m)])}{\bar{\mu}(\Psi[W(n, m)])} = \infty.$$

Ярославский государственный
университет

Поступило
23 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. А. Чегис, С. В. Яблонский, Тр. математического института им. В. А. Стеклова, т. 51 (1958). ² W. V. Quine, Am. Math. Monthly, v. 59, 8 (1952). ³ E. J. McCluskey, The Bell System Technical J., v. 35, 6 (1956).