

И. И. БАВРИН

КЛАССЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ,
АССОЦИИРОВАННЫЕ С ОПЕРАТОРОМ $J_a^{(l)}$,
И ИХ СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 XII 1975)

В настоящей заметке дано полное структурное представление для вводимых здесь ассоциированных с оператором $J_a^{(l)}$ новых классов гармонических и аналитических в круге функций. Эти классы являются существенным обобщением таких классов функций, как известного класса гармонических функций, совпадающего с множеством функций, представимых интегралом Пуассона — Стильтьеса ⁽¹⁾, классов аналитических функций, введенных Г. Герглотцем ⁽²⁾ и Ф. Риссом ⁽³⁾. Указанные новые классы функций вводятся при помощи построенного автором ^(4, 5) оператора $J_a^{(l)}$, а основным аппаратом для получения структурных формул служат найденные автором ^(4, 5) обобщенные интегральные формулы Пуассона и Шварца.

Пусть $f = f(z) = f(re^{i\varphi})$ — функция, голоморфная в круге $|z| < 1$, а $u = u(z) = u(re^{i\varphi})$ — функция, гармоническая в круге $|z| < 1$. Пусть далее l — натуральное число и $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ — положительные числа. Автором ^(4, 5) введены операторы

$$L_a^{(l)}[f] = L_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l)}^{(l)}[f] = L_{\gamma_l}[L_{\gamma_{l-1}} \dots [L_{\gamma_1}[f]] \dots],$$

$$L_{\gamma_j}[f] = \gamma_j f + z f', \quad j = 1, \dots, l;$$

$$J_a^{(l)}[u] = J_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l)}^{(l)}[u] = J_{\gamma_l}[J_{\gamma_{l-1}} \dots [J_{\gamma_1}[u]] \dots],$$

$$J_{\gamma_j}[u] = \gamma_j u + r u_r', \quad j = 1, \dots, l,$$

и то же при замене u на f . Им же ⁽⁵⁾ найдены соответственно обратные операторы

$$L_a^{(-l)}[f] = \int_0^1 d\varepsilon_1 \dots \int_0^1 d\varepsilon_{l-1} \int_0^1 \varepsilon_1^{\gamma_1-1} \dots \varepsilon_l^{\gamma_l-1} f(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l z) d\varepsilon_l,$$

$$J_a^{(-l)}[u] = \int_0^1 d\varepsilon_1 \dots \int_0^1 d\varepsilon_{l-1} \int_0^1 \varepsilon_1^{\gamma_1-1} \dots \varepsilon_l^{\gamma_l-1} u(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l r e^{i\varphi}) d\varepsilon_l$$

($\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$ вещественны) и то же при замене u на f ; при этом

$$L_a^{(0)}[f] = f, \quad J_a^{(0)}[u] = u$$

и то же при замене u на f .

Обозначим через $U_a^{(l)}$ класс гармонических в круге $|z| < 1$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |J_a^{(l)}[u(re^{i\varphi})]| d\varphi \right\} < +\infty.$$

Обозначим через $C_a^{(l)}$ класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(z)] \geq 0, \quad |z| < 1.$$

Обозначим через $R_a^{(l)}$ класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых выполняется условие

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(re^{i\varphi})]| d\varphi \right\} < +\infty.$$

Так как при $f(z) \in C_a^{(l)}$ интегралы

$$\int_0^{2\pi} |J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(re^{i\varphi})]| d\varphi = \int_0^{2\pi} J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(re^{i\varphi})] d\varphi =$$

$$= 2\pi J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(0)] = \gamma_1 \dots \gamma_l \cdot 2\pi \operatorname{Re} f(0)$$

ограничены числом, не зависящим от r , то, очевидно, имеем

$$C_a^{(l)} \subset R_a^{(l)}.$$

Из определения классов $U_a^{(l)}$, $C_a^{(l)}$, $R_a^{(l)}$ следует, что при $l=0$ имеем известные три класса. Представление первого из них хорошо известно ⁽¹⁾, а представления двух других классов были впервые получены в ^(2, 3).

Представления классов $U_a^{(l)}$, $C_a^{(l)}$, $R_a^{(l)}$ даются ниже на основе установленных автором ^(4, 5) обобщенных интегральных формул Пуассона и Шварца, ассоциированных с оператором $J_a^{(l)}$. Приведем эти формулы.

1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$. Тогда, если функция $f(z)$ и все ее производные до порядка μ ($\mu=0, 1, 2, \dots$) включительно непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq R$, то для $l=0, 1, 2, \dots, \mu$

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_a^{(-l)} \left[S \left(e^{-i\theta} \frac{z}{R} \right) \right] J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(Re^{i\theta})] d\theta,$$

$$|z| < R;$$

$$\operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_a^{(-l)} \left[P \left(\varphi - \theta, \frac{r}{R} \right) \right] J_a^{(l)} [\operatorname{Re} f(Re^{i\theta})] d\theta,$$

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Отсюда следуют два предложения:

1. Если функция $u(re^{i\varphi})$ гармоническая в круге $|z| < R$, то для любого ρ , $0 < \rho < R$, и любого целого неотрицательного l справедлива интегральная формула

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_a^{(-l)} \left[P \left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho} \right) \right] J_a^{(l)} [u(\rho e^{i\theta})] d\theta,$$

$$0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2. Если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$, то для любого ρ , $0 < \rho < R$, и любого целого неотрицательного l справедлива интегральная

формула

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_a^{(-1)} \left[S \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho} \right) \right] J_a^{(1)} [\operatorname{Re} f(\rho e^{i\theta})] d\theta, \\ |z| < \rho.$$

Представления классов $U_a^{(1)}$, $C_a^{(1)}$ и $R_a^{(1)}$ даются в следующих теоремах.

Теорема 1. 1) Класс $U_a^{(1)}$ совпадает с множеством функций $u(z)$, представимых в виде интеграла

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_a^{(-1)} [P(\varphi - \theta, r)] d\psi(\theta), \quad (1)$$

$$0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$; в представлении (1) данной функции $u(z) \in U_a^{(1)}$ соответствующая функция $\psi(\theta)$ может быть определена с помощью предела

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\theta J_a^{(1)} [u(\rho_n e^{i\varphi})] d\varphi,$$

где $\{\rho_n\}$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$, $\rho_n \uparrow 1$, — некоторая возрастающая последовательность.

2) Класс $\bar{U}_a^{(1)} \subset U_a^{(1)}$ гармонических в круге $|z| < 1$ функций $u(z)$, для которых

$$J_a^{(1)} [u(z)] \geq 0, \quad |z| < 1,$$

совпадает с множеством функций, представимых в виде (1), где функция $\psi(\theta)$ не убывает на $[0, 2\pi]$.

Теорема 2. Класс $C_a^{(1)}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = ic + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_a^{(-1)} [S(e^{-i\theta} z)] d\psi(\theta), \quad |z| < 1, \quad (2)$$

где $\operatorname{Im} c = 0$, $\psi(\theta)$ — произвольная неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$; класс $R_a^{(1)}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде (2), где $\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечным изменением на $[0, 2\pi]$.

В процессе доказательства теоремы 1 существенно используется предложение 1, а при доказательстве теоремы 2 — предложение 2 и теорема 1 данной заметки.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
28 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М. — Л., Гостехиздат, 1950. ² G. Herglotz, Leipzig Ber., v. 63, 501 (1911). ³ F. Riesz, Ann. Norm., v. 28(3), 34 (1911). ⁴ И. И. Баврин, ДАН, т. 172, № 6 (1967). ⁵ И. И. Баврин. В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, М., в. 15 (1), 1973, стр. 3.