

Б. Г. ГАБДУЛХАЕВ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 18 XI 1975)

1. Для вычисления регулярных интегралов предложено и исследовано значительное число квадратурных формул с кратными узлами ⁽¹⁾. Для сингулярных интегралов эта задача до сих пор не рассматривалась. Ниже для сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта, понимаемых в смысле главного значения по Коши, предлагаются и исследуются квадратурные формулы с кратными узлами.

2. Рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$Ix=I(x;s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}x(\sigma)d\sigma, \quad (1)$$

где плотность $x=x(s)$ — известная непрерывная 2π -периодическая функция.

Пусть $H_n x=H_n(s)=H_n(x;s)$ — тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos ns$, интерполирующий функцию $x(s)$ в узлах

$$s_k=\frac{2k\pi}{n}, \quad k=1,\dots,n, \quad (2)$$

в том смысле, что

$$H_n(s_k)=x(s_k)=x_k, \quad H'_n(s_k)=x'(s_k)=x'_k, \quad k=1,\dots,n. \quad (3)$$

Как известно ⁽²⁾, полином $H_n(s)$ существует, единствен и имеет вид

$$H_n(s)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\{x_k+x'_k\sin(s-s_k)\}\left(\sin\frac{ns}{2}\operatorname{cosec}\frac{s-s_k}{2}\right). \quad (4)$$

Аппроксимируя плотность $x(s)$ полиномом $H_n(s)$ и используя соответствующие результаты работ ⁽³⁻⁵⁾, для вычисления сингулярного интеграла (1) находим следующую квадратурную формулу:

$$I(x;s)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\{x_k+x'_k\cos(s-s_k)\}\left\{n\operatorname{ctg}\frac{s-s_k}{2}-\sin\frac{n(s-s_k)}{2}\operatorname{cosec}\frac{s-s_k}{2}\right\}+ \\ +\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nx'_k\cos(s-s_k)+R_n(x;s); \quad (5)$$

$$I(x;s_j)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^n\{x_k+x'_k\cos(s_k-s_j)\}\operatorname{ctg}\frac{s_j-s_k}{2}+ \\ +\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nx'_k\cos(s_k-s_j)+R_n(x;s_j), \quad (6)$$

где $R_n x=R_n(s)=R_n(x;s)$ — остаточный член.

Отметим, что квадратурная формула (5), (6) точна для любого тригонометрического полинома порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos ns$, поэтому ее тригонометрическая степень точности равна $n-1$.

3. Пусть $C^{(1)} = C_{2\pi}^{(1)}$ — пространство непрерывно дифференцируемых 2π -периодических функций с нормой $\|x\| = \|x\|_C + \|x'\|_C$, $x(s) \in C^{(1)}$.

Для оператора $H_n: C^{(1)} \rightarrow C$, определяемого соотношениями (2)–(4), имеет место оценка

$$\|H_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Тогда с помощью теоремы Банаха — Штейнхауса о сильной сходимости последовательности линейных операторов в B -пространствах (см., например, в (6)) можно доказать, что интерполяционный процесс (2)–(4) равномерно сходится для любой функции $x(s) \in C^{(1)}$.

Однако такой способ исследования не позволяет оценить скорость сходимости процесса (2)–(4). Поэтому нам представляется интересным следующая

Л е м м а. Для любой $x(s) \in C^{(1)}$ интерполяционный процесс (2)–(4) равномерно сходится со скоростью

$$|r_n(x; s)| = |x(s) - H_n(s)| \leq (1 + 4\pi) E_{n-1}(x'), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $E_m(\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(s) \in C$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n . Оценка (8) на всем классе $C^{(1)}$ не может быть улучшена в смысле порядка.

4. В этом пункте предлагаются два способа исследования сходимости и оценки погрешности квадратурного процесса с кратными узлами (5), (6).

Обозначим через $\omega(\delta; \varphi)$ модуль непрерывности в C функции $\varphi(s) \in C_{2\pi}$ с шагом δ . Имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть плотность $x(s)$ интеграла (1) такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \omega\left(\frac{1}{2^k n}; x'\right)$$

сходится равномерно относительно n .

Тогда квадратурный процесс (5), (6) сходится равномерно (относительно s) со скоростью

$$|R_n(x; s)| \leq 2(1 + 4\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi} + \frac{2k \ln 2}{\pi} \right) E_{2^{k-1}n-1}(x'). \quad (9)$$

С л е д с т в и е 1. Если $x'(s)$ удовлетворяет условию Дини — Липшица, то квадратурный процесс (5), (6) равномерно сходится. Если, в частности, плотность $x(s) \in H_{\alpha}^{(r)} = \{x: x(s) \in C^{(r)}, x^{(r)}(s) \in \text{Lip } \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$, то для любых $r \geq 1$ справедлива оценка

$$|R_n(x; s)| \leq (a \ln n + b) H(x^{(r)}; \alpha) n^{-r-\alpha+1}, \quad r + \alpha > 1, \quad (10)$$

где a и b — вполне определенные постоянные, не зависящие от n , а $H(x^{(r)}; \alpha)$ — постоянная условия Липшица $x^{(r)}(s)$.

С л е д с т в и е 2. Если плотность $x(s) \in C^{(r)}$, то при $r > 1$ квадратурный процесс (5), (6) равномерно сходится со скоростью

$$|R_n(x; s)| \leq (1 + 4\pi) (3 + 2^r + \ln n) n^{-r+1} E_{n-1}(x^{(r)}). \quad (11)$$

Следствие 3. Если плотность $x(s)$ — аналитическая функция, то квадратурный процесс (5), (6) равномерно сходится со скоростью геометрической прогрессии:

$$|R_n(x; s)| \leq c q^n, \quad c = \text{const} > 0, \quad 0 < q = \text{const} < 1. \quad (12)$$

Укажем вкратце способ доказательства теоремы 1. Остаточный член $R_n x$ представляем в виде ряда

$$R_n x = \sum_{k=1}^{\infty} I(H_{2^k n} x - H_{2^{k-1} n} x) \quad (13)$$

и пользуемся доказываемым с помощью работы (7) неравенством

$$|I(H_n x; s)| \leq \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi} \right) \max_{1 \leq j \leq 2n} |H_n(t_j)|, \quad t_j = \frac{j\pi}{n}, \quad j=1, \dots, 2n. \quad (14)$$

В силу соотношений (13) и (14) находим

$$|R_n(x; s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2^k \cdot 4n}{\pi} \right) \|H_{2^k n} x - H_{2^{k-1} n} x\|_c.$$

Отсюда и из леммы получаем оценку (9). Далее пользуемся свойствами наилучших равномерных приближений.

Оценки (10) — (12) устанавливаются с помощью теоремы 1 и известных оценок (см., например, (8, 9)) наилучших равномерных приближений периодических функций.

В этом состоит первый способ исследования сходимости квадратурного процесса (5), (6).

Второй способ исследования квадратурного процесса (5), (6) основан на применении результатов работы (3) и приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. Если плотность $x(s) \in H_{\alpha}^{(1)}$, $0 < \alpha \leq 1$, то при любых β , $0 < \beta < \alpha$, квадратурный процесс (5), (6) равномерно сходится со скоростью

$$|R_n(x; s)| \leq \frac{2(1+4\pi) \ln n}{\pi} E_{n-1}(x') + \frac{4(1+4\pi)}{\beta} \sum_{h=1}^{\infty} 2^{\beta(h-1)} E_{2^{h-1}n-1}(x'). \quad (15)$$

Следствие. Если $x(s) \in C^{(r)}$, то для любых $r > 1$ и $0 < \beta < 1$ справедлива оценка

$$|R_n(x; s)| \leq (1+4\pi) \left\{ \ln n + \frac{2\pi}{\beta(1-2^{-r+1+\beta})} \right\} \frac{E_{n-1}(x^{(r)})}{n^{r-1}}. \quad (16)$$

5. Приведенные выше оценки погрешности квадратурного процесса (5), (6) не улучшаемы в смысле порядка. В частности, имеет место

Теорема 3. Пусть

$$x(s) \in F = H_{\alpha}^{(r)}(M) = \{ \varphi: \varphi(s) \in H_{\alpha}^{(r)}, H(\varphi^{(r)}; \alpha) \leq M, 0 < \alpha \leq 1, r \geq 1 \}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{x \in F} \|R_n(x; s)\|_c = MO \left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}} \right), \quad r+\alpha > 1. \quad (17)$$

6. Рассмотрим вопрос о численном дифференцировании функции $x(s)$ и соответствующей сопряженной функции с помощью тригонометрического интерполяционного процесса (2) — (4).

Теорема 4. Пусть $x(s) \in H_{\alpha}^{(r)}$, $r \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда для любых натуральных k таких, что $1 \leq k < r + \alpha - 1$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max \{ \|r_n^{(k)}(x; s)\|_C, \|R_n^{(k)}(x; s)\|_C \} &\leq 2(1+4\pi)n \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jk} E_{2^j - 1, n-1}(x') \leq \\ &\leq \frac{6(1+4\pi)H(x^{(r)}; \alpha)}{1 - 2^{-r-\alpha+k+1}} \frac{2^k}{n^{r+\alpha-k-1}}, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Оценка (18) в классе $F = H_{\alpha}^{(r)}(M)$ не может быть улучшена в смысле порядка:

$$\sup_{x \in F} \|r_n^{(k)}(x; s)\|_C = \sup_{x \in F} \|R_n^{(k)}(x; s)\|_C = MO(n^{-r-\alpha+k+1}). \quad (19)$$

7. Обозначим через $H_n^0 x = H_n^0(x; s) = H_n^0(s)$ тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos ns$, интерполирующий функцию $x(s) \in C$ в узлах (2) в том смысле, что

$$H_n^0(s_k) = x(s_k), \quad H_n^{0'}(s_k) = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (3^0)$$

Тогда для вычисления интеграла (1) в силу формул (2), (3⁰), (4) — (6) получаем квадратурную формулу

$$I_n^0(x; s) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k \left\{ n \operatorname{ctg} \frac{s-s_k}{2} - \sin \frac{n(s-s_k)}{2} \operatorname{cosec} \frac{s-s_k}{2} \right\}; \quad (5^0)$$

$$I_n^0(x; s_j) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k \operatorname{ctg} \frac{s_j - s_k}{2}, \quad j=1, \dots, n. \quad (6^0)$$

Теорема 5. Если $x(s) \in H_{\alpha}(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, то квадратурный процесс (5⁰), (6⁰) равномерно сходится со скоростью

$$\sup_{x \in H_{\alpha}(M)} \|R_n^0(x; s)\|_C = MO \left\{ \frac{(\ln n)^{1+[\alpha]}}{n^{\alpha}} \right\}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (20)$$

где $R_n^0(x; s) = I(x; s) - I_n^0(x; s)$, а $[\alpha]$ — целая часть числа α . Оценка (20) никаким улучшением дифференциальных свойств плотности $x(s)$ не может быть улучшена в смысле порядка.

Таким образом, квадратурный процесс (5⁰), (6⁰), хотя и более простой (в этом его основное достоинство для приложений), чем процесс (5), (6), но в смысле аппроксимативных свойств он значительно уступает исследованному выше квадратурному процессу (5), (6) с кратными узлами.

8. В заключение следует отметить, что приведенные выше факты переносятся на сингулярные интегралы с ядрами типа Коши, заданные как на окружности с центром в начале координат, так и на отрезке вещественной оси.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
23 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Квадратурные формулы. М., 1974. ² А. Х. Турецкий, Теория интерполирования в задачах, Минск, 1968. ³ Б. Г. Габдулхаев, В сб.: Тр. Международной конф. по конструктивной теории функций, Варна, 19-25 мая, 1970, София, 1972, стр. 35. ⁴ Б. Г. Габдулхаев, ДАН, т. 179, № 2 (1968). ⁵ Б. Г. Габдулхаев, ДАН, т. 179, № 3 (1968). ⁶ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. ⁷ Б. Г. Габдулхаев, ДАН, т. 223, № 6 (1975). ⁸ Н. П. Корнейчук, ДАН, т. 150, № 6 (1963). ⁹ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.