

УДК 513.881

МАТЕМАТИКА

М. Г. ЗАЙДЕНБЕРГ

ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 XI 1975)

Изометрии пространств Орлича изучались в ⁽⁴⁻⁶⁾. Дж. Ламперти, обобщая результаты С. Банаха (^(1, 2), гл. II), описавшего изометрии пространств $L_p[0, 1]$, указал, в частности, класс N -функций $M(t)$ таких, что каждая изометрия пространства Орлича $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$, оставляющая инвариантным модуляр

$$I_M(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} M(|f(x)|) d\mu,$$

порождается сохраняющим меру преобразованием пространства Ω и умножением на функцию, равную по модулю единице (см. ⁽⁴⁾, теорема 4.1). Дальнейшее продвижение в изучении изометрий пространств Орлича комплекснозначных функций было сделано Г. Люмером ^(5, 6), использовавшим введенные им понятия полускалярного произведения и эрмитова оператора в банаховом пространстве. Ниже приводится результат Г. Люмера (теорема 1). В настоящей работе получено окончательное описание групп изометрий пространств Орлича в комплекснозначном случае (теорема 4).

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -аддитивной, σ -конечной, неатомарной мерой μ , определенной на σ -алгебре Σ подмножеств Ω . Напомним, что пространство Орлича $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$, соответствующее N -функции $M(t)$ (см. ⁽³⁾), состоит из (классов) измеримых функций на Ω , для которых конечна норма

$$\|f\| = \inf \{ \lambda > 0 : I_M(f\lambda^{-1}) \leq 1 \}. \quad (1)$$

Через $E_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначается замыкание в пространстве $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ подмножества ограниченных функций. Пусть Γ — фактор-алгебра алгебры Σ по идеалу подмножеств нулевой меры. Всякий σ -автоморфизм φ алгебры Γ порождает обратимый оператор T_φ в пространстве (классов) измеримых функций на Ω , удовлетворяющий условию

$$T_\varphi[\chi_A] = [\chi_{\varphi A}],$$

где χ_A — характеристическая функция множества $A \in \Sigma$. (Ограничения, при которых каждый σ -автоморфизм φ алгебры Γ индуцируется поточечным преобразованием пространства Ω , приведены в ⁽⁸⁾.) В ⁽⁶⁾ фактически доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть U — обратимая изометрия пространства Орлича комплекснозначных функций $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $M(t) \neq ct^2$. Существует σ -автоморфизм φ алгебры Γ и измеримая функция $u(x)$ такие, что для элементов $f \in E_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ справедливо равенство

$$Uf(x) = u(x) \cdot T_\varphi f(x). \quad (2)$$

Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется идеальным, если из $|f(x)| \leq |g(x)|$, $g \in E$, следует $f \in E$, $\|f\|_E \leq \|g\|_E$.

Теорема 2. Пусть E — идеальное пространство измеримых функций

на Ω такое, что $\chi_A \in E$, если $A \in E$, и $\mu(A) < \infty$. Пусть обратимая изометрия U пространства E , σ -автоморфизм φ алгебры Γ и измеримая функция $u(x)$ удовлетворяют соотношению

$$U\chi_A(x) = u(x) \cdot \chi_{\varphi A}(x) \quad (3)$$

для всех $A \in \Sigma$ таких, что $\mu(A) < \infty$.

Тогда для каждой функции $f \in \Sigma$ выполнено равенство (2).

Доказательство. Пусть $f \in E$ и пусть $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность множеств конечной меры таких, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, и сужение функций f на каждое из множеств Ω_n ограничено. Из условий теоремы следует, что $U(f\chi_{\Omega_n}) = uT_{\varphi}(f) \cdot \chi_{\varphi\Omega_n}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить равенства $(Uf)\chi_{\varphi\Omega_n} \stackrel{\text{def}}{=} U(f\chi_{\Omega_n})$, или, что то же, показать, что $U(f\chi_{C\Omega_n}) \cdot \chi_{\varphi\Omega_n} = 0$, $n=1, 2, \dots$ ($CA = \Omega \setminus A$). В предположении противного существует номер n такой, что $g\chi_{C\Omega_n} \neq 0$, где $g \stackrel{\text{def}}{=} U(f\chi_{C\Omega_n})$. Заметим, что, как следует из условия теоремы, $\Omega = \{x: u(x) \neq 0\}$. Пусть множество $A \subset \varphi\Omega_n$, константы $K > 0$, $\delta > 0$ таковы, что $0 < \mu(\varphi^{-1}A) < \infty$, и

$$K|u(x) \cdot \chi_A(x)| \geq |g(x) \cdot \chi_A(x)| \geq \delta|u(x)\chi_A(x)|. \quad (4)$$

Пусть, далее, функция $\varepsilon(x)$ такова, что

$$|\varepsilon(x)| = 1, x \in \varphi^{-1}A, \quad \varepsilon(x) = 0, x \in C\varphi^{-1}A,$$

$$\arg[u(x) \cdot T_{\varphi}\varepsilon(x)] = \arg g(x), x \in A.$$

Положим

$$f_{\tau}(x) = f(x) \cdot \chi_{C\Omega_n} + \tau\varepsilon(x), \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Справедливы равенства

$$\|f_{\tau}\| = \|f_{-\tau}\| = \|g \pm \tau u T_{\varphi}\varepsilon\| = \|g\chi_{CA} + (\tau|u| \pm |g|)\chi_A\|. \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает равенство

$$\|g\chi_{CA} + (\tau - \delta)|u|\chi_A\| = \|g\chi_{CA} + (\tau + \delta)|u|\chi_A\|, \quad \tau \geq K.$$

Следовательно, выпуклая возрастающая функция

$$\|g\chi_{CA} + \tau|u|\chi_A\| \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\tau)$$

удовлетворяет тождеству $\psi(\tau + \delta) = \psi(\tau - \delta)$ при $\tau \geq K$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть φ — σ -автоморфизм алгебры Γ , и пусть мера μ_1 определена равенством $\mu_1(A) = \mu(\varphi^{-1}A)$. Через $\varphi'(x)$ обозначается производная Радона — Никодима $d\mu_1/d\mu$. Справедлива формула

$$\int_{\varphi A} f(x) d\mu = \int_A T_{\varphi}^{-1}[f(x)(\varphi'(x))^{-1}] d\mu. \quad (6)$$

Теорема 3. Всякая обратимая изометрия пространства Орлича комплекснозначных функций $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$, $M(t) \neq ct^2$, представима в виде (2), где автоморфизм φ и функция $u(x)$ связаны тождеством

$$M(|u(x)| \cdot t) = \varphi'(x) \cdot M(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Обратно, если σ -автоморфизм φ алгебры Γ и функция $u(x)$ связаны тождеством (7), то оператор U , задаваемый равенством (2), является изометрией пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Пусть U — обратимая изометрия пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$. В силу теорем 1 и 2 имеет место представление (2). Дока-

жем тождество (7). Положим $\Omega_n = \{x \in \Omega: |u(x)| \leq n\}$. Пусть множества A_1 и A_2 таковы, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\mu(A_i) < \infty$, $\varphi A_i \subset \Omega_n$, $i=1, 2$. Для фиксированных $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ положим $\lambda = \|c_1 \chi_{A_1} + c_2 \chi_{A_2}\|^{-1}$. Имеют место равенства

$$\mu(A_1) \cdot M(c_1 \lambda) + \mu(A_2) \cdot M(c_2 \lambda) = 1; \quad (8)$$

$$\int_{\varphi A_1} M(c_1 \lambda |u(x)|) d\mu + \int_{\varphi A_2} M(c_2 \lambda |u(x)|) d\mu = 1. \quad (9)$$

Воспользовавшись (6), преобразуем (9) к виду

$$\int_{A_1} T_{\varphi}^{-1}([\varphi'(x)]^{-1} M(c_1 \lambda |u(x)|)) d\mu + \int_{A_2} T_{\varphi}^{-1}([\varphi'(x)]^{-1} M(c_2 \lambda |u(x)|)) d\mu = 1. \quad (10)$$

Полагая

$$c_2 = 0, \quad \mu(A_i) = \varepsilon, \quad T_{\varphi}^{-1}([\varphi'(x)]^{-1} M(\|\chi_{A_i}\|^{-1} |u(x)|)) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\varepsilon}(x),$$

получаем, что для любого множества $A \subset \varphi^{-1} \Omega_n$ меры ε

$$\int_A f_{\varepsilon}(x) d\mu = 1,$$

откуда

$$f_{\varepsilon}(x) |_{\Omega_n} \equiv \varepsilon^{-1}.$$

В силу произвольности n $f_{\varepsilon}(x) \equiv \varepsilon^{-1}$ для всех $\varepsilon < \mu(\Omega)$, что равносильно выполнению (7) при любом $t > M^{-1}([\mu(\Omega)]^{-1})$.

Как следует из (8), если c_2 достаточно мало, то $M(c_1 \lambda) > [\mu(\Omega)]^{-1}$. При этом в силу доказанного первые слагаемые в левых частях (8) и (10) совпадают, а значит, совпадают и вторые слагаемые. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют, в силу произвольности c_2 , сделать вывод, что (7) справедливо при любом $t \geq 0$.

Обратное утверждение теоремы устанавливается непосредственной проверкой. Теорема доказана.

Для данной N -функции $M(t)$ множество R_M тех чисел $k > 0$, для которых $M(kt) \equiv (M(k)[M(1)]^{-1})M(t)$, $t \in [0, \infty)$, образует подгруппу мультипликативной группы $\stackrel{\text{def}}{=} R_+$ положительных вещественных чисел. Рассмотрим функцию $h_M(t) = [\ln M(\exp t)]'$. Легко видеть, что $k \in R_M$ тогда и только тогда, когда $\ln k$ — период функции $h_M(t)$. Отсюда следует, что подгруппа $R_M \subset R_+$ либо несобственная, либо бесконечная циклическая. В последнем случае через k_M , $k_M > 1$, обозначим образующую группы R_M . Положим

$$p_M = (\ln M(k_M) - \ln M(1)) (\ln k_M)^{-1}.$$

Имеет место неравенство

$$[M(1)(M(k_M))^{-1} \min_{1 \leq i \leq h_M} M(t)] t^{p_M} \leq M(t) \leq (\max_{1 \leq i \leq h_M} M(t)) t^{p_M}, \quad t \in [0, \infty),$$

т. е. функция $M(t)$ эквивалентна функции t^{p_M} .

Из всего изложенного нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть N -функция $M(t)$ такова, что:

а) функция $h_M(t)$ непериодическая. Тогда $R_M = \{1\}$, а группа изометрий пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ состоит из всех операторов вида (2), где φ — σ -автоморфизм, сохраняющий меру, а $|u(x)| \equiv 1$;

б) функция $h_M(t)$ — периодическая непостоянная функция. Тогда R_M — бесконечная циклическая группа с образующей k_M . Группа изометрий пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ состоит из всех операторов вида (2) таких, что $(M(1)[M(k_M)]^{-1})\varphi'(x) \in R_M$, $x \in \Omega$, а функция $u(x)$ связана с автомор-

физмом φ тождеством (7). Пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L_{FM}(\Omega, \Sigma, \mu)$ совпадают, и нормы в них эквивалентны

в) $h_M(t) \equiv p$, $p \neq 2$. Тогда $M(t) = ct^p$, $R_M = R_+$. Группа изометрий пространства $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ состоит из всех операторов вида (2), где $|u(x)|^p = \varphi'(x)$;

г) $h_M(t) \equiv 2$. Тогда $M(t) = ct^2$, и группой изометрий является группа унитарных операторов пространства $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Замечание 1. Как показано в (7), группа изометрий пространства $L_p[0, 1]$ почти транзитивно действует на единичной сфере, т. е. орбиты этой группы плотны на сфере. Из теоремы 4 следует, что свойство почти транзитивности нормы характеризует пространство L_p в классе пространств Орлича.

Замечание 2. В пространствах Орлича обычно вводится еще одна норма, эквивалентная норме (1) и задаваемая равенством

$$\|f\| = \inf_{\lambda > 0} \{ \lambda^{-1} [1 + I_M(\lambda f)] \}. \quad (11)$$

Как следует из теоремы 3, изометрии пространства $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ с нормой (1) сохраняют модуляр I_M , а, значит, группа изометрий, соответствующих норме (1), вложена в группу изометрий, соответствующих норме (11). Пользуясь двойственностью этих норм, нетрудно показать, что в сепарабельном случае (т. е. в случае, когда функция $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию (3)) обе группы совпадают.

Замечание 3. Изучению изометрий пространств Орлича на пространствах с атомарной мерой посвящены работы (9, 10). Окончательное описание групп изометрий произвольных симметричных координатных пространств получено в (11) (см. также (7)).

Орловский отдел
Всесоюзного научно-исследовательского
института экономики сельского хозяйства

Поступило
3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Banach, *Studia Math.*, v. 4, 193 (1930). ² С. Банах, Курс функционального анализа, Киев, 1948. ³ М. А. Красносельский, Я. Б. Ругицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958. ⁴ J. Lamperti, *Pacific J. Math.*, v. 8, N 3, 459 (1958). ⁵ G. Lumer, *Bull. Am. Math. Soc.*, v. 68, N 1, 28 (1962). ⁶ G. Lumer, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, v. 13, N 1, 99 (1963). ⁷ S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Warszawa, 1972. ⁸ Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., «Мир», 1969. ⁹ K. W. Tam, *Pacific J. Math.*, v. 31, N 1, 233 (1969). ¹⁰ J. A. Goldstein, *Pacific J. Math.*, v. 42, N 2, 257 (1974). ¹¹ М. Ш. Браверман, Е. М. Семенов, ДАН, т. 217, № 2, 257 (1974).