

Н. Х. ИБРАГИМОВ, Р. Л. АНДЕРСОН

ГРУППЫ КАСАТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ — БЕКЛУНДА

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 9 XII 1975)

В теории касательных преобразований, развитой Софусом Ли ⁽¹⁾, рассматривается случай одной функции нескольких переменных и изучаются непрерывные группы преобразований, сохраняющих касание первого порядка. Обобщения теории С. Ли на случай нескольких функций или на случай преобразований, сохраняющих касание конечного порядка ≥ 2 , оказываются тривиальными (теорема 1). Нетривиальное обобщение теории С. Ли удастся получить путем рассмотрения преобразований, сохраняющих касание бесконечного порядка, причем число функций в этом случае может быть произвольным. Идея использования преобразований, сохраняющих касание бесконечного порядка поверхностей, имеется в работе А. Беклунда ⁽²⁾. В настоящей статье мы реализуем эту идею в более общем случае и рассматриваем непрерывные локальные группы Ли преобразований, сохраняющих касание бесконечного порядка, которые ниже называются группами касательных преобразований Ли — Беклунда. Инфинитезимальная характеристика групп Ли — Беклунда, сформулированная в теореме 2, приводит к известному результату С. Ли в случае групп касательных преобразований первого порядка и к формулам продолжения в случае групп точечных преобразований. Отметим, что рассмотрение касательных преобразований Ли — Беклунда дает теоретико-групповую основу обобщения методов группового анализа дифференциальных уравнений ⁽³⁾, предложенного независимо разными авторами ^(4, 5).

Рассмотрим пространство переменных $(x, u, u, \dots, u)$, где

$$x \in R^N, \quad u \in R^M, \quad u = \{u_{i_1 \dots i_s}^\alpha \mid \alpha = 1, \dots, M; i_1, \dots, i_s = 1, \dots, N\}, \quad s = 1, \dots, n;$$

величины $u_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ симметричны по всем нижним индексам. Пусть G — группа преобразований

$$x'^i = f^i(x, u, u, \dots, u; a),$$

$$u'^\alpha = \psi^\alpha(x, u, u, \dots, u; a),$$

$$u_{i_1 \dots i_n}'^\alpha = \varphi_{i_1 \dots i_n}^\alpha(x, u, u, \dots, u; a),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{i_1 \dots i_n}'^\alpha = \psi_{i_1 \dots i_n}^\alpha(x, u, u, \dots, u; a), \quad \alpha = 1, \dots, M; i_1, \dots, i_n = 1, \dots, N,$$

в этом пространстве. Без ограничения дальнейших рассмотрений можно считать, что G — однопараметрическая группа.

Определение 1. Группа G называется группой касательных преобразований порядка n , если уравнения

$$du^\alpha - u_j^\alpha dx^j = 0, \quad du_{i_1 \dots i_s}^\alpha - u_{i_1 \dots i_s j}^\alpha dx^j = 0, \quad s = 1, \dots, n-1; \quad \alpha = 1, \dots, M; \quad i_1, \dots, i_s = 1, \dots, N, \quad (2)$$

задают инвариантное многообразие группы G , полученной продолжением преобразований (1) на дифференциалы $dx^i, du^\alpha, \dots, du_{i_1 \dots i_n}^\alpha$.

Одним из примеров группы касательных преобразований порядка n является группа точечных преобразований

$$x'^i = g^i(x, u; a), \quad i = 1, \dots, N; \quad u'^\alpha = h^\alpha(x, u; a), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (3)$$

продолженная по обычным формулам замены переменных на производные от u по x до порядка n . Другой пример — это касательные преобразования С. Ли, которые соответствуют случаю $M=1$ и являются касательными преобразованиями первого порядка. Продолжение группы касательных преобразований С. Ли на производные до порядка n представляет собой группу касательных преобразований порядка n . Следующая теорема показывает, что указанными примерами исчерпывается весь класс касательных преобразований порядка n при любом n .

Теорема 1. *Всякая группа касательных преобразований порядка n является:*

(I) *группой точечных преобразований (3), продолженной на производные до порядка n , если $M>1$;*

(II) *группой касательных преобразований С. Ли, продолженной на производные до порядка n , если $M=1$.*

В работе ⁽²⁾ А. Беклунд, рассматривая случай одной функции u нескольких переменных $x^1, \dots, x^N$, изучал преобразования переменных x, u , зависящие не только от самих этих переменных, но также от производных u по x до некоторого конечного порядка. Он интерпретировал эти преобразования как преобразования поверхностей в пространстве (x, u) и ввел понятие преобразований, сохраняющих касание бесконечного порядка поверхностей. При этом выяснилось, что преобразования производных любого конечного порядка с необходимостью зависят от производных более высокого порядка. Учитывая этот факт и результат теоремы 1, будем рассматривать группы преобразований в бесконечномерном пространстве переменных $(x, u, u_1, u_2, \dots)$ при условии, что эти преобразования сохраняют касание бесконечного порядка.

Пусть $x \in R^N$, $u \in R^M$ и для каждого $s=1, 2, \dots$ величины u_s определены как выше. Рассмотрим аналитическую шкалу $\mathcal{A}$ ^(6, 7) элементов $z = (x, u, u_1, u_2, \dots)$ и однопараметрическую локальную группу Ли G преобразований

$$z' = F(z; a) \quad (4)$$

в $\mathcal{A}$, которые в координатной форме будем записывать в виде

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(x, u, u_1, \dots; a), \\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha(x, u, u_1, \dots; a), \\ u_i'^\alpha &= \psi_i^\alpha(x, u, u_1, \dots, a), \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{G}$ — продолжение группы G на дифференциалы $dz = (dx^i, du^\alpha, du_i^\alpha, \dots)$ по формулам

$$\begin{aligned} dx'^i &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial f^i}{\partial u_j^\beta} du_j^\beta + \dots, \\ du'^\alpha &= \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u_j^\beta} du_j^\beta + \dots, \\ du_i'^\alpha &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u_j^\beta} du_j^\beta + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Определение 2. Группа G называется группой касательных преобразований Ли — Беклунда, если система уравнений

$$\begin{aligned} du^\alpha - u_j^\alpha dx^j &= 0, \quad du_{i_1 \dots i_s}^\alpha - u_{i_1 \dots i_{s-1} j}^\alpha dx^j = 0, \quad s=1, 2, \dots, \\ \alpha &= 1, \dots, M; \quad i_1, \dots, i_s = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

инвариантна относительно продолженной группы $\tilde{G}$.

Пусть задано теперь однопараметрическое семейство преобразований (4). Определим отображение $\Xi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ формулой

$$\Xi(z) = \left. \frac{\partial F(z; a)}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (6)$$

и предположим, что обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием

$$\frac{dz}{da} = \Xi(z), \quad z|_{a=0} = z_0$$

имеет и притом единственное решение $z \in \mathcal{A}$; можно считать, например, что отображение Ξ является квазидифференциальным ^(6, 7). При таком предположении группа преобразований (4) однозначно определяется своим касательным векторным полем (6). А именно, отображение $F(z; a)$ задает однопараметрическую локальную группу Ли, если и только если оно является решением уравнений Ли

$$\frac{dF}{da} = \Xi(F), \quad F|_{a=0} = z. \quad (7)$$

Следующая теорема дает инфинитезимальную характеристику группы касательных преобразований Ли — Беклунда; используется стандартное обозначение

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i i_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + u_{i i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots \quad (8)$$

и координатная запись

$$\Xi = (\xi^i, \eta^\alpha, \xi_i^\alpha, \xi_{i i_2}^\alpha, \dots) \quad (9)$$

векторного поля (6).

Теорема 2. *Группа преобразований (4) является группой касательных преобразований Ли — Беклунда в том и только том случае, если векторное поле (9) удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} \xi_i^\alpha &= D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j), \\ \xi_{i_1 \dots i_s}^\alpha &= D_{i_s}(\xi_{i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha) - u_{i_1 \dots i_{s-1} j}^\alpha D_{i_s}(\xi^j), \quad s=2, 3, \dots, \\ \alpha &= 1, \dots, M; \quad i, i_1, \dots, i_s = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Используя соотношения (10), можно установить, что группы касательных преобразований Ли — Беклунда, отличные от группы точечных преобразований (3) и группы касательных преобразований С. Ли, не имеют конечномерных инвариантных подпространств в $\mathcal{A}$; тем самым, уравнения Ли (7) представляют собой существенно бесконечную систему уравнений. А именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть группа касательных преобразований Ли — Беклунда (4) является продолжением группы G преобразований (1) с некоторым $n \geq 1$.*

Тогда G представляет собой n -е продолжение либо группы точечных преобразований, либо группы касательных преобразований С. Ли.

Касательные преобразования Ли — Беклунда могут быть использованы для теоретико-групповой трактовки обобщения ^(4, 5) методов группового анализа дифференциальных уравнений. Обобщение это состоит в том, что вместо инфинитезимальных операторов групп точечных преобразований, представляющих собой линейные дифференциальные операторы первого порядка, вводятся в рассмотрение линейные дифференциальные операторы высших порядков. При таком обобщении оставался не выясненным вопрос о возможности сопоставления этим операторам какой-либо естественной группы преобразований. Теперь мы видим, что операторы высшего порядка (как линейные, так и нелинейные) можно получить, рассматривая инфинитезимальные операторы групп касательных преобразований Ли — Беклунда. Действительно, пусть функции $u'^\alpha(x)$ получены из функций

$u^\alpha(x)$ в результате преобразований (4). Стандартные вычисления дают, что

$$u'^\alpha(x) = u^\alpha(x) + \alpha Q^\alpha[u(x)] + o^\alpha(a),$$

где Q^α — дифференциальный оператор,

$$Q^\alpha[u(x)] = \eta^\alpha\left(x, u(x), \frac{\partial u^\beta(x)}{\partial x^j}, \dots\right) - \xi^{\alpha i'} x, u(x), \frac{\partial u^\beta(x)}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}.$$

Если, в частности,

$$\eta^\alpha - \xi^{\alpha i} u_i^\alpha = q^\alpha(x) + q_\beta^\alpha(x) u^\beta + \sum_{s=1}^{\infty} q_{\beta}^{\alpha, j_1 \dots j_s}(x) u_{j_1 \dots j_s}^\beta,$$

то Q^α будет линейным дифференциальным оператором,

$$Q^\alpha[u(x)] = q^\alpha(x) + q_\beta^\alpha(x) u^\beta(x) + \sum_{s=1}^{\infty} q_{\beta}^{\alpha, j_1 \dots j_s}(x) \frac{\partial^s u^\beta(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}},$$

рассматриваемым в указанном обобщении.

Понятие группы касательных преобразований Ли — Беклунда, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений, и метод нахождения такой группы формулируются так же, как и в случае группы точечных преобразований, с той лишь разницей, что при рассмотрении группы Ли — Беклунда необходимо использовать исходные дифференциальные уравнения вместе с их дифференциальными следствиями. По теореме 2 касательное векторное поле (9) группы Ли — Беклунда определяется своими координатами ξ^i , $i=1, \dots, N$, и η^α , $\alpha=1, \dots, M$. Если записать критерий инвариантности данной системы дифференциальных уравнений относительно группы Ли — Беклунда в терминах векторного поля (9), то с учетом формул (10) получим уравнения относительно функций $\xi^i(x, u, u, \dots)$ и $\eta^\alpha(x, u, u, \dots)$ — определяющие уравнения искомой группы

Ли — Беклунда.

В качестве примера рассмотрим уравнение Шредингера для атома водорода

$$\frac{1}{2}\Delta u + (1/r - k)u = 0,$$

где $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$, $k = \text{const}$. Оно допускает 3-параметрическую группу Ли — Беклунда, порожденную касательными векторами $E_i = (\xi_{(i)}^j, \eta_{(i)}, \dots)$, $i=1, 2, 3$, с координатами

$$\xi_{(i)}^j = \delta_i^j, \quad \eta_{(i)} = - \sum_{j,l,m,n=1}^3 e_{ijl} e_{jmn} x^m u_{nl} + (x^i/r)u,$$

где δ_i^j — символ Кронекера, e_{ijl} — обычный перестановочный символ. Наличие этой группы приводит к специфическому для атома водорода закону сохранения — вектору Ленца — Рунге. Указанная группа, очевидно, не является группой касательных преобразований С. Ли. Отметим, что рассматриваемое уравнение вообще не допускает касательных преобразований С. Ли, отличных от точечных преобразований.

Институт гидродинамики

Сибирского отделения Академии наук СССР

Новосибирск

Физический факультет

Тихоокеанского университета

Стоктон, Калифорния, США

Поступило

3 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Lie, F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, B. 3, Leipzig, Teubner, 1893.
- ² A. V. Bäcklund, Math. Annal., B. 9, 297 (1876).
- ³ Л. В. Овсянников, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
- ⁴ В. Н. Шаповалов, Изв. высш. учебн. завед., Физика, № 6, 75 (1968).
- ⁵ R. L. Anderson, S. Kumei, C. E. Wolfman, Phys. Rev. Letters, v. 28, N 15, 988 (1972).
- ⁶ Л. В. Овсянников, ДАН, т. 200, № 4, 789 (1971).
- ⁷ Л. В. Овсянников, Аналитические группы, Изд. Новосибирского госуниверситета, Новосибирск, 1972.