

УДК 517.947.42

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМЫНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

О ЛОКАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА ВБЛИЗИ НИЖНЕЙ КРЫШКИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 XI 1975)

Одним из предметов качественной теории параболических уравнений 2-го порядка является изучение локального поведения решения вблизи границы области их непрерывности. Достаточные условия для граничных α -оценок (в норме Гёльдера) получены в работах ^(1, 2). Точные достаточные условия на поведение боковой части границы, обеспечивающие локальную регулярность в смысле Липшица (в параболической метрике), найдены в работах авторов ^(3, 4). В настоящей заметке методом барьерных функций изучается поведение решения параболического уравнения 2-го порядка вблизи нижнего основания области, лежащего на гиперплоскости $t=0$. Найдены точные достаточные условия на поведение начальных данных, позволяющие, в частности, охватить двусторонними оценками порядок стремления (при $t \rightarrow +0$) решения к своим предельным значениям на нижнем основании в широком диапазоне от $\ln^{-\alpha}(t^{-1})$ ($\alpha > 0$) до $\exp\{-t^{-\beta}\}$ ($\beta \in (0, 1)$).

Пусть G — открытое связное множество евклидова пространства $E_{n+1} = \{(x_1, \dots, x_n; t)\}$, причем $G_\tau = G \cap \{t = \tau\}$ $\forall \tau \in (0, T)$ есть область (в E_n) n -мерной гиперплоскости $t = \tau$. Пусть $\bar{G} \cap \{t = T\} = \bar{\gamma}(G)$, где верхняя крышка $\gamma(G)$ есть непустая область в (E_n) гиперплоскости $t = T$, а $\bar{G} \cap \{t = 0\} = \bar{\gamma}_0(G)$, где нижняя крышка $\gamma_0(G)$ есть непустая область (в E_n) гиперплоскости $t = 0$. Множество $\Gamma(G) = \partial G \setminus \gamma(G)$ называется параболической границей области G , а множество $\Sigma(G) = \Gamma(G) \setminus \gamma_0(G)$ называется боковой частью параболической границы $\Gamma(G)$. На множестве $G \cup \gamma(G)$ рассмотрим параболический оператор 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

с положительной характеристической частью и с ограниченными коэффициентами так, что $\forall |\xi| = 1$ и $\forall (x, t) \in G \cup \gamma(G)$

$$0 < \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq a^0 < +\infty, \quad |a_i(x, t)| \leq A,$$

$$i=1, 2, \dots, n; \quad -C \leq c(x, t) \leq 0.$$

Условие А. Функция $\Omega \in C[0, s_0] \wedge C^{(2)}(0, s_0]$, $\Omega(s) \neq 0$ является модулем непрерывности, выпуклым вверх на $[0, s_0]$.

Примеры 1. Модули непрерывности

$$\Omega_1(s) = \begin{cases} \ln^{-\alpha}(1/s), & s \in (0, s_0]; \\ 0, & s=0; \end{cases} \quad \Omega_2(s) = s^\alpha, \quad s \in [0, s_0];$$

$$0, \quad s=0; \quad \forall \alpha > 0; \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

удовлетворяют условию А.

Если $M_0 = (x_0, 0) \in \gamma_0(G)$, то введем обозначение

$$C_{x_0, h}^{i_0} = \{(x, t) \in E_{n+1} \mid |x - x_0| \leq h, 0 < t \leq t_0\},$$

$$|x - x_0|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2.$$

Для точек $M = (x, t) = z \in \bar{G}$ введем $\forall \lambda > 0$ параболическую норму $|z|_{p, \lambda} = \sqrt{|x - x_0|^2 + \lambda t}$.

Теорема 1 (об оценке сверху). Пусть на $G \cup \gamma(G)$ определен параболический оператор (1), причем для функции $u(x, t)$, точки $M_0 \in \gamma_0(G)$ и цилиндра $C_{x_0, h_0}^{i_0} \subset G \cup \gamma(G)$ выполнены условия

$$u \in C(\bar{G}) \cap C_{x, t}^{2, 1}(G \cup \gamma(G)); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G \cup \gamma(G), \quad (3)$$

$$|f(x, t)| \leq l_1 |z|_{p, \lambda_1}^{-1} D\Omega(|z|_{p, \lambda_1}), \quad (x, t) \in C_{x_0, h_0}^{i_0},$$

где $\lambda_1 = 2(na^0 + \sqrt{n}Ah_0) + l_1 > 0$ и модуль непрерывности Ω удовлетворяет условию А,

$$|u(x, 0) - u(x_0, 0)| < \Omega(|x - x_0|), \quad 0 < |x - x_0| \leq h_0.$$

Тогда $\exists t_1 \in (0, t_0]$, $h_1 \in (0, h_0]$ такие, что имеет место оценка сверху

$$|u(x, t) - u(x_0, 0)| \leq \Omega(|z|_{p, \lambda_1}) \quad \forall (x, t) \in C_{x_0, h_1}^{i_1}. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Оценка (4) для модуля непрерывности Гёльдера $\Omega_2(s)$ получена в работе (1).

У с л о в и е Б. Функция $q \in C[0, s_0] \cap C^{(2)}(0, s_0)$ обладает свойствами

$$q(0) = 0, \quad Dq(s) \geq 0, \quad sD^2q(s) \geq -\beta Dq(s), \quad s \in (0, s_0),$$

где $\beta > 0$ — постоянная.

П р и м е р ы 2. Модули непрерывности $\Omega_1(s)$ ($\forall \beta > 1 - (1 + \alpha) \ln^{-1}(1/s_0)$) и $\Omega_2(s)$ ($\forall \beta \geq 1$), а также функция $q_0(s) = s^\alpha$, $s \in [0, s_0]$ ($\forall \alpha > 0$) $\forall \beta > 0$ удовлетворяют условию Б.

Теорема 2 (об оценке снизу). Пусть на $G \cup \gamma(G) \subset E_{n+1}$ (при $n \geq 2$) определен равномерно параболический оператор (1) (с постоянными параболическими $0 < a_0 \leq a^0 < +\infty$), причем для функции $u(x, t)$, точки $M_0 \in \gamma_0(G)$ и цилиндра $C_{x_0, h_0}^{i_0} \subset G \cup \gamma(G)$ выполнены условия (2) (с $c(x, t) \equiv 0$), (3) (с $f(x, t) \leq 0$), а также

$$u(x, 0) - u(x_0, 0) > q(|x - x_0|), \quad 0 < |x - x_0| \leq h_0, \quad (5)$$

где функция $q(s)$ удовлетворяет условию Б и $(n-1)a_0 > \beta a^0$.

Тогда $\exists t_1 \in (0, t_0]$, $h_1 \in (0, h_0]$, $\lambda_2 = (n-1)a_0 - \beta a^0 - \sqrt{n}Ah_1 > 0$ и $l_0 > 0$ такие, что имеет место оценка снизу

$$u(x, t) - u(x_0, 0) \geq l_0 q(|z|_{p, \lambda_2}), \quad (x, t) \in C_{x_0, h_1}^{i_1}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Теоремы 1 и 2 имеют место для модулей непрерывности Ω_1 и Ω_2 .

У с л о в и е В. Функция $q \in C[0, s_0] \cap C^{(2)}(0, s_0)$ обладает свойствами

$$q(0) = 0; \quad Dq(s) \geq 0, \quad sD^2q(s) \leq \beta Dq(s), \quad s \in (0, s_0),$$

где $\beta > 0$ — постоянная.

П р и м е р ы 3. Модуль непрерывности Ω , удовлетворяющий условию А, и функция $q_0(s)$ ($\forall \beta \geq \alpha - 1 > 0$) удовлетворяют условию В.

Теорема 3 (об оценке сверху). Пусть на $G \cup \gamma(G)$ определен параболический оператор (1), причем для функции $u(x, t)$, точки $M_0 \in \gamma_0(G)$ и цилиндра $\Pi_{x_0, h_0}^{t_0} \subset G \cup \gamma(G)$ выполнены условия (2), (3), а также $\forall (x, t) \in \Pi_{x_0, h}^{t_0}$

$$|f(x, t)| \leq l_2 |z|_{p, \lambda_3}^{-1} Dq(|z|_{p, \lambda_3}),$$

$$0 \leq -c(x, t) |u(x_0, 0)| \leq l_3 |z|_{p, \lambda_3}^{-1} Dq(|z|_{p, \lambda_3}),$$

где функция $q(s)$ удовлетворяет условию В, а

$$\lambda_3 = 2[a^0(\beta + n) + \sqrt{n}Ah_0 + l_2] > 0;$$

пусть также

$$|u(x, 0) - u(x_0, 0)| < q(|x - x_0|), \quad 0 < |x - x_0| \leq h_0. \quad (7)$$

Тогда $\exists t_1 \in (0, t_0]$ и $l_0 > 0$ такие, что имеет место оценка сверху

$$|u(x, t) - u(x_0, 0)| \leq l_0 q(|z|_{p, \lambda_3}), \quad (x, t) \in \Pi_{x_0, h_0}^{t_1}.$$

З а м е ч а н и е. Теоремы 1 и 2 имеют место для модуля непрерывности Ω , удовлетворяющего условию А, и для функции $q_0(s)$ ($\forall \alpha > 1$).

У с л о в и е Г. Функция $q \in C[0, s_0] \wedge C^{(2)}(0, s_0)$ обладает свойствами

$$q(0) = 0; \quad Dq(s) \geq 0, \quad sD^2q(s) \geq Dq(s), \quad s \in (0, s_0),$$

$$q(s) = o(s^{-1}Dq(s)) \quad (s \rightarrow +0).$$

П р и м е р ы 4. Функция $q_0(s)$ при $\alpha \geq 2$ и функция

$$q_1(s) = \begin{cases} \exp\{-s^{-\alpha}\}, & s \in (0, s_0) \quad \forall \alpha > 0, \\ 0, & s = 0, \end{cases}$$

удовлетворяют условию (Г).

Теорема 4 (об оценке снизу). Пусть на $G \cup \gamma(G)$ определен равномерно параболический оператор (1) ($c(x, t) \equiv 0$), причем функция $u(x, t)$, точка $M_0 \in \gamma_0(G)$ и цилиндр $\Pi_{x_0, h_0}^{t_0} \subset G \cup \gamma(G)$ удовлетворяют условиям (2), (3) ($c f(x, t) \leq 0$) и (5), где функция $q(s)$ удовлетворяет условию Г.

Тогда $\exists t_1 \in (0, t_0]$, $h_1 \in (0, h_0]$, $l_0 > 0$ и $\lambda_4 = na_0 - \sqrt{n}Ah_1 > 0$ такие, что имеет место оценка снизу (6) с заменой λ_2 на λ_4 .

З а м е ч а н и е. Теорема 4 имеет место для функций $q_0(s)$ ($\forall \alpha \geq 2$) и $q_1(s)$.

У с л о в и е А1. Модуль непрерывности Ω удовлетворяет условию А и обладает свойством: $D^2\Omega(s)$ монотонно убывает на $(0, s_0)$.

З а м е ч а н и е. Из условия А1 вытекает:

$$\int_0^{s_0} (D\Omega(s))^2 ds = +\infty, \quad (8)$$

$$\lim_{s \rightarrow +0} D\Omega(s) = +\infty,$$

поэтому существует обратная функция $\Omega^{-1} \in C[0, \eta_0] \wedge C^{(2)}(0, \eta_0)$, для которой выполнены условия

$$\Omega^{-1}(0) = 0, \quad \Omega^{-1}(\eta) > 0, \quad D\Omega^{-1}(\eta) = \frac{1}{D\Omega(s)} > 0,$$

$$\eta \in (0, \eta_0), \quad s \in (0, s_0).$$

Если модуль непрерывности Ω удовлетворяет условию А1, то для точек $M_0 = (x_0, 0) \in \gamma_0(G)$ и $\bar{M} = (x, t) = z \in G \quad \forall \mu > 0$ введем квазипараболическую норму $|z|_{\mu, \Omega} = \sqrt{\mu |x - x_0|^2 + \Omega^2(t)}$ и обозначение $s = \Omega^{-1}(|z|_{\mu, \Omega})$ так, что

$|z|_{\mu, \Omega} = \Omega(s)$ и при $x = x_0$, $|z|_{\mu, \Omega} = \Omega(t)$, $s = t$. Введем также барьер (см. (8))

$$\omega(\eta) = \begin{cases} \exp \left\{ - \int_{\Omega^{-1}(\eta)}^{s_0} (D\Omega(s))^2 ds \right\}, & \eta > 0, \\ 0, & \eta = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Примеры 5. Модуль непрерывности Ω_1 удовлетворяет условию A1, причем $\forall \delta \in (0, 1)$ при $t \rightarrow +0$ имеют место двусторонние оценки

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \frac{\alpha^2}{(1-\delta)t} \ln^{-2-2\alpha} \frac{1}{t} \right\} &\leq \exp \left\{ - \int_t^{s_0} (D\Omega_1(s))^2 ds \right\} = \\ &= \omega(t) \leq \exp \left\{ - \frac{(1-\delta)\alpha^2}{t} \ln^{-2-2\alpha} \frac{1}{t} \right\} \quad \forall t \in (0, t_1(\delta)). \end{aligned}$$

Модуль непрерывности $\Omega_2(s) = s^{(1-\alpha)/2}$, $s \in [0, s_0]$ $\forall \alpha \in (0, 1)$, также удовлетворяет условию A1 и $\forall \delta \in (0, 1)$ имеют место двусторонние оценки

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha} t^{-\alpha} \right\} &\leq \omega(t) = \exp \left\{ - \int_t^{s_0} (D\Omega_2(s))^2 ds \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ - \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha} (1-\delta) t^{-\alpha} \right\} \quad \forall t \in (0, t_1(\delta)). \end{aligned}$$

Теорема 5 (об оценке сверху). Пусть на $G \cup \gamma(G)$ определен равномерно параболический оператор (1) ($c(x, t) \equiv 0$), причем для функции $u(x, t)$, точки $M_0 \in \gamma_0(G)$ и цилиндра $\Pi_{x_0, h_0}^{t_0} \subset G \cup \gamma(G)$ выполнены условия (2), (3) ($c(x, t) \equiv 0$). Пусть модуль непрерывности Ω удовлетворяет условию A1 и (см. (9))

$$|u(x, 0) - u(x_0, 0)| < \omega(\sqrt{\mu_1} |x - x_0|), \quad 0 < |x - x_0| \leq h_0,$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{2[a^0(1+nk_0) + \sqrt{n}Ah_0]}, \quad k_0 = \frac{2a^0}{a_0 D\Omega^2(s_0)} > 0.$$

Тогда $\exists t_1 \in (0, t_0]$ и $l_0 > 0$ такие, что имеет место оценка сверху

$$|u(x, t) - u(x_0, 0)| \leq l_0 \omega(|z|_{\mu, \Omega}) \quad \forall (x, t) \in \Pi_{x_0, h_0}^{t_1}.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ I. R. Cannon, Ann. Scuola norm. superior. Pisa, Sci. fis. e mat., v. 19, N 3, 415 (1965). ² Л. И. Камынин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 7, № 3, 551 (1967). ³ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, т. 219, № 4, 785 (1974). ⁴ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, Сибирск. матем. журн., № 6 (1975).