

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. ПОКРОВСКИЙ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С ГИСТЕРЕЗИСОМ КОНТИНУАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕЛЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 11 XII 1975)

Для преодоления трудностей, возникающих при описании процессов в системах, содержащих элементы с гистерезисом, применяются различные специальные приемы (библиографию см. в ^(1, 2)). Основную роль играет возможность представления гистерезисных нелинейностей как операторов над функциями — входами, отражающих наличие памяти у преобразователей. Указанные представления, как правило, соответствуют разным блок-схемам из преобразователей более простой природы. Так, например, для многих сложных нелинейностей можно использовать континуальные аналоги параллельного соединения преобразователей типа «упор» ^(3, 4) или, в более общем случае, преобразователей типа элементарного гистерона ⁽⁵⁾. Легко описать модели, отвечающие остроумным гистерезисным схемам Г. А. Корна и А. В. Нетушила ^(6, 7) с обратными связями. В настоящей работе изучаются математические модели, соответствующие блок-схемам, основной частью которых является континуальный аналог системы параллельно соединенных двухпозиционных реле. Эти модели восходят к известным представлениям Прейсаха ⁽⁸⁾ о внешней гистерезисной петле ферромагнетиков и построениям Гилтая, А. А. Березовского и Л. П. Нижника ^(9, 10); они удобны своей элементарностью и возможностью простого исследования свойств преобразователей. Приводимые ниже теоремы можно рассматривать как теоремы о специальных спектральных разложениях гистерезисных преобразователей.

1. Пусть на множестве Ω задана конечная мера μ . Пусть каждой точке $\omega \in \Omega$ сопоставлено двухпозиционное реле $R(\omega) = R[\alpha(\omega), \beta(\omega)]$, где $\alpha(\omega)$ — ток отключения, $\beta(\omega)$ — ток включения, $\alpha(\omega) \leq \beta(\omega)$ (см., например, ^(11, 12)). Функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ предполагаются измеримыми. Характеристическую функцию $a(\omega)$ измеримого множества $E \subset \Omega$ назовем допустимым состоянием системы реле $R(\omega)$ при входе u , если при каждом ω значение $a(\omega)$ — допустимое состояние реле $R(\omega)$ при входе u . Закон $a(\omega; t)$ изменения допустимых состояний при переменном входе $u(t)$ определяется законами изменения состояний каждого отдельного реле. Систему $R(\omega)$ можно рассматривать как математический преобразователь (см. ⁽¹²⁾), если определить выход равенством $x(t) = \int a(\omega; t) d\mu(\omega)$. Для описанного таким образом преобразователя имеют смысл, конечно, не произвольные входы $u(t)$ (даже при измеримом входе $u(t)$ состояние $a(\omega; t)$ при некоторых t может оказаться неизмеримым). Однако выход $x(t)$ определен при всех непрерывных или полунепрерывных снизу входах $u(t)$. Выход $x(t)$ непрерывен при каждом непрерывном входе в том и только том случае, если мера каждого из множеств $\{\omega: \alpha(\omega) = \alpha_0\}$, $\{\omega: \beta(\omega) = \beta_0\}$ равна нулю.

Введенный преобразователь R — это преобразователь с бесконечным числом допустимых состояний. Однако он допускает (например, на классе непрерывных входов) управляемые сжатия. Эти сжатия в общем случае определяются неоднозначно и просто описываются. Если функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ ограничены, то управляемое сжатие на классе непрерывных входов единственно.

2. Пусть W и V — некоторые преобразователи, определенные на одном и том же классе U входов $u(t)$. Будем говорить, что V является моделью преобразователя W , если любому u_0 и каждому допустимому при входе u_0 начальному состоянию b_0 преобразователя W отвечает по крайней мере одно допустимое при том же входе u_0 начальное состояние a_0 преобразователя V такое, что при произвольном фиксированном входе $u(t) \in U$, $u(t_0) = u_0$ выходы преобразователей W и V совпадают при всех $t \geq t_0$. В приведенном определении у модели V может быть начальное состояние a , при котором выходы преобразователя V не совпадают с выходами преобразователя W ни при каком его начальном состоянии; однако всегда существует сжатие V^0 модели V , которое полностью (в смысле входо-выходных соответствий) эквивалентно W . Задачу построения модели преобразователя W часто называют задачей идентификации. Опишем некоторые детерминированные преобразователи, моделями которых могут служить рассмотренные в п. 1 преобразователи R — континуальные системы реле; полное построение модели преобразователя W заключается в определении множества Ω с мерой μ , реле $R(\omega)$ и допустимых состояний $a(\omega) = \varphi(b)$, отвечающих допустимым состояниям b преобразователя W .

Первый пример — функциональный преобразователь $Fu(t) = f[u(t)]$, состояния которого совпадают со входами. Для него можно построить модель R , являющуюся континуальной системой реле, в том и только том случае, если $f(u)$ — производящая функция конечной меры μ_0 на прямой $(-\infty, \infty)$: достаточно положить $\Omega = (-\infty, \infty)$, $\alpha(\omega) = \beta(\omega) = \omega$, $\mu = \mu_0$.

Пусть заданы непрерывные неубывающие функции $\Gamma_-(u)$ и $\Gamma_+(u)$ $(-\infty < u < \infty)$, $\Gamma_-(u) \leq \Gamma_+(u)$, $\Gamma_-(u) \rightarrow 0$ и $\Gamma_+(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow -\infty$. Пусть допустимыми состояниями (совпадающими со входами) гистерона $W = W(\Gamma_-, \Gamma_+)$ при каждом u являются точки множества $A(u) = [\Gamma_-(u), \Gamma_+(u)] \cap \Gamma_-(R^1) \cap \Gamma_+(R^1)$; пусть переменные выходы при неубывающем на $[t_0, t_1]$ непрерывном входе $u(t)$, $t \geq t_0$, и начальном состоянии $a_0 \in A[u(t_0)]$ определяются равенством $x(t) = \max \{a_0, \Gamma_-[u(t)]\}$, а при невозрастающем входе — равенством $x(t) = \min \{a_0, \Gamma_+[u(t)]\}$. Тогда (см. ⁽⁵⁾) гистерон W виброустойчив и, следовательно, определен на всех непрерывных входах.

Теорема 1. Гистерон $W(\Gamma_-, \Gamma_+)$ имеет модель R , являющуюся континуальной системой неидеальных реле, тогда и только тогда, когда $\Gamma_-(u)$ ограничена и $\text{mes } \Gamma_-(Z) = 0$, где $Z = \{u: \Gamma_-(u) = \Gamma_+(u)\}$.

В условиях этой простой теоремы можно положить: μ — лебегова мера, $\Omega = [0, \sup \Gamma_-(u)]$, $R(\omega) = R[\Gamma_-(u), \Gamma_+(u)]$.

Пусть множества $\{u: \Gamma_-^{-1}(u) = \Gamma_+^{-1}(u)\}$ и $\{u: \Gamma_-^{-2}(u) = \Gamma_+^{-2}(u)\}$ не пересекаются, $Fu(t) = f[u(t)]$. Тогда преобразователь

$$W = W(\Gamma_-^{-1}, \Gamma_+^{-1}) - W(\Gamma_-^{-2}, \Gamma_+^{-2}) + F \quad (1)$$

также будет гистероном, который характеризуется тем, что определяющая система кривых внутри каждой петли имеет вид $x = f(u) + c$, где c — параметр.

Теорема 2. Каждый гистерон, допускающий представление в виде какой-либо континуальной системы реле, представим единственным образом в виде (1).

Теорема 1 позволяет представить произвольный виброустойчивый гистерон (см. ⁽⁵⁾) как суперпозицию $Wu(t) = g[Ru(t), u(t)]$, где $g(x, u)$ — функция двух переменных, а R — виброустойчивый гистерон, являющийся континуальной системой неидеальных реле.

3. В этом пункте рассматривается вопрос, какие управляемые преобразователи имеют модель — континуальную систему реле.

Пусть непрерывный вход $u(t)$ кусочно-монотонен. Тройку чисел $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ назовем $u(t)$ -упорядоченной, если $u(t_1)$ совпадает или с максимумом M или с минимумом m функции $u(t)$ на $[t_0, t_2]$, причем при

$u(t_1) = M$ верна оценка

$$\min \{u: u=u(t), t_0 \leq t \leq t_1\} \leq \min \{u: u=u(t), t_1 \leq t \leq t_2\} = u(t_2),$$

а при $u(t_1) = m$ — оценка

$$\max \{u: u=u(t), t_0 \leq t \leq t_1\} \geq \max \{u: u=u(t), t_1 \leq t \leq t_2\} = u(t_2).$$

Преобразователь W , определенный на некотором классе полунепрерывных снизу входов, содержащем все кусочно-монотонные входы, назовем R -преобразователем, если он обладает следующими двумя свойствами:

1°) если $x(t)$, $t \geq t_0$, — выход, соответствующий кусочно-монотонному непрерывному входу $u(t)$, и тройка $\{t_0, t_1, t_2\}$ обладает свойством $u(t)$ -упорядоченности, то разность $x(t_2) - x(t_1)$ зависит только от чисел $u(t_1)$ и $u(t_2)$: $x(t_2) - x(t_1) = F[u(t_1), u(t_2)]$, причем функция $F(\alpha, \beta)$ антисимметричная ($F(\alpha, \beta) = -F(\beta, \alpha)$) и производящая для конечной меры $\mu = \mu(F)$ с носителем в полуплоскости $\alpha \leq \beta$;

2°) если непрерывное управление $u(t)$ кусочно-монотонно и $u(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, а $x(t)$ — соответствующий выход, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $F(\alpha, \beta)$ производит меру с носителем в полуплоскости $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\alpha \leq \beta} |F''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta < \infty.$$

В общем случае достаточно, например, ограниченности сумм модулей соответствующих вторых разностей.

Преобразователь W назовем полувиброустойчивым, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $N > 0$, что при каждом входе $u_0(t)$, $u_0(t_0) \leq -N$, и каждой сходящейся снизу к $u_0(t)$ последовательности входов $u_n(t)$ соответствующие выходы при каждом $t \geq t_0$ удовлетворяют предельному неравенству

$$\overline{\lim} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Теорема 3. Управляемый преобразователь W имеет модель, являющуюся континуальной системой реле, в том и только том случае, если он является полувиброустойчивым R -преобразователем.

Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 3 в качестве Ω можно взять полуплоскость $\alpha \leq \beta$ с мерой $\mu(F)$.

4. Если W — управляемый преобразователь, имеющий модель — континуальную систему реле R , то его свойства полностью определяются свойствами соответствующей меры μ .

Теорема 4. Преобразователь R является гистероном, если и только если мера μ обладает следующими свойствами:

1°) носитель меры μ лежит на кривой $\beta - \alpha = \psi(\alpha + \beta)$, где $|\psi(u) - \psi(v)| \leq |u - v|$;

2°) мера каждого отрезка, параллельного одной из координатных осей, равна нулю;

3°) если мера некоторого множества $M(\alpha_0, \beta_0) = \{(\alpha, \beta): \alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \beta\}$ равна нулю, то носитель меры μ не пересекается с этим множеством.

Перейдем к преобразователям, которые не обязательно являются гистеронами.

Теорема 5. Для того чтобы преобразователь R был непрерывным (равномерно непрерывным) на пространстве S непрерывных входов, необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю мера каждого отрезка, параллельного одной из координатных осей (каждой кривой $\alpha + \beta = \psi(\beta - \alpha)$, где $|\psi(u) - \psi(v)| \leq |u - v|$).

Если мера μ известна, то вычисление приращения выхода преобразователя при кусочно-монотонном входе не представляет труда. Естествен

вопрос о возможности использовать при определении выхода приближения континуальных систем реле конечными системами. Для получения равномерных приближений нужно, очевидно, чтобы изучаемая система отличалась от равномерно непрерывной системы (см. теорему 5) не более чем счетным числом тех реле, которым отвечают атомы меры μ .

5. При изучении многих конкретных преобразователей (например, в теории магнетизма) используются континуальные системы реле с неотрицательной мерой μ . Такие системы реле будем называть положительными.

Положительная система реле преобразует множество $\mathfrak{D}$ непрерывных справа и полунепрерывных снизу функций в себя; поэтому из них можно при помощи параллельного и последовательного соединения конструировать более сложные преобразователи. Класс этих более сложных преобразователей обозначим через $\mathfrak{R}$.

Пусть $W \in \mathfrak{R}$; $f(t, x, y)$ — ограниченная, T -периодическая по переменной t и неубывающая по переменным x и y функция. Пусть L и M — такие дифференциальные операторы, что функция Грина T -периодической задачи для уравнения $Lx = M\varphi(t)$ неотрицательна.

Теорема 6. Уравнение

$$Lx = Mf(t, x, Wx)$$

имеет по крайней мере одно T -периодическое решение без участков скольжения.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
24 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Сорокин, К теории внутреннего трения, М., «Стройиздат», 1965.
- ² R. Bouc, *Modèle mathématique d'hystérésis. Application aux systèmes à un degré de liberté* Thèse, Mars 1969, Marseille, Centre Nat. Réch. Sci., 1969.
- ³ А. Ю. Пилинский, Изв. АН СССР, ОНТ, № 3, 583 (1944).
- ⁴ J. F. Besseling, J. Appl. Mech., v. 25, 529 (1958).
- ⁵ В. С. Козякин, М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, т. 206, № 1, 800 (1972).
- ⁶ Т. Корн, Г. Корн, Электронные моделирующие устройства, ИЛ, М., 1955.
- ⁷ А. В. Негушил, Тр. V Международн. конфер. по нелинейным колебаниям, т. 4, Киев, Изд-во АН УССР, 1970, стр. 393.
- ⁸ S. Preisach, Zs. Phys., B. 94, № 5, 6, 277 (1935).
- ⁹ J. Giltay, Appl. Sci. Res., v. B2, 199 (1951).
- ¹⁰ А. А. Березовский, Л. П. Нижник, Тр. V Международн. конфер. по нелинейным колебаниям, т. 4, Киев, Изд-во АН УССР, 1970, стр. 68.
- ¹¹ Я. З. Цыпкин, Релейные автоматические системы, М., «Наука», 1974.
- ¹² М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, т. 216, № 4, 733 (1974).