

УДК 62.501.12

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. Б. КРЫМОВ, А. С. ВАСЬКОВ

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО
ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЭКСТЕНСИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ
В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ**

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 3 XI 1975)

1. Любой разворот твердого тела, осуществляемый как сумма нескольких поворотов вокруг ортогональных осей, может быть представлен конечным поворотом вокруг некоторой оси (оси Эйлера). Такой разворот дает существенный выигрыш по быстродействию или энергетическим затратам и получил в литературе название экстенсивного разворота ⁽²⁾.

Принцип экстенсивного управления заключается в выборе ограниченного по величине вектора управляющего момента $\bar{M}$ из условия движения аппарата вокруг оси Эйлера.

В работе ⁽²⁾ получено аналитическое решение задачи управления экстенсивным разворотом в частном случае, когда управляющие моменты по связанным осям одинаковы по величине, а направления проекций вектора перекрестного гироскопического момента и производной от вектора кинетического момента на определяющую ось (понятие определяющей оси будет дано ниже) при разгоне совпадают, тогда как при торможении они направлены встречно.

В статье ⁽³⁾ приведен синтез оптимального управления экстенсивным разворотом. Однако отсутствие интегральных зависимостей для угла и угловой скорости делает управление незамкнутым.

В настоящей работе предпринята попытка дополнить указанные решения и найти управление в форме, удобной для практической реализации.

2. При экстенсивном развороте

$$\varphi_i = \varphi \cos \gamma_i, \quad (1)$$

где φ_i — угол поворота вокруг i -й оси ($i=1, 2, 3$ — соответствует осям x_1, y_1, z_1), φ — текущий угол поворота вокруг оси Эйлера.

Запишем динамические уравнения Эйлера в векторной и скалярной форме:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K} = \bar{M}; \quad (2)$$

$$J_i \ddot{\varphi}_i + (J_{i+2} - J_{i+1}) \dot{\varphi}_{i+2} \dot{\varphi}_{i+1} = M_i, \quad (3)$$

где $\bar{K}$ — кинетический момент тела, $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения тела, $\bar{M}$ — момент внешних сил, J_i — осевые моменты инерции, M_i — управляющий момент по i -й связанной оси.

Уравнение (2) и (3) можно преобразовать к виду

$$J_K \ddot{\varphi} \bar{e}_K + J_\Gamma \dot{\varphi}^2 \bar{e}_\Gamma = M \cos \theta \bar{e}_K + M \sin \theta \bar{e}_\Gamma, \quad (4)$$

где $\bar{e}_3, \bar{e}_K, \bar{e}_\Gamma$ — орты оси Эйлера, кинетического и гироскопического моментов, причем $\bar{e}_\Gamma = \bar{e}_3 \times \bar{e}_K / |\bar{e}_3 \times \bar{e}_K|$; $J_\Gamma^2 = \sum_{i=1}^3 (J_{i+2} - J_{i+1}) v_{i+2}^2 v_{i+1}^2$; $J_K^2 = \sum_{i=1}^3 J_i^2 v_i^2$, $M^2 = \sum_{i=1}^3 M_i^2$, $v_i = \cos \gamma_i$ — направляющие косинусы оси Эйлера, θ — угол между векторами управляющего и кинетического моментов.

Учитывая уравнение (1), из (3) можно получить

$$J_i \ddot{\varphi} + (J_{i+2} - J_{i+1}) v_{i+1} v_{i+2} \dot{\varphi}^2 = M_i, \quad i=1, 2, 3. \quad (5)$$

Величины v_i , $\ddot{\varphi}$ и M_i в формуле (5) имеют свои знаки, причем, очевидно, знаки $\ddot{\varphi}$, v_i и M_i совпадают, поскольку ускорение направлено в ту же сторону, что и момент, если перекрестный гироскопический момент не превышает управляющего (в общем случае это может и не соблюдаться). Домножив левую и правую части (5) на $\text{Sign } v_i M_i$, можно получить

$$c_i \ddot{\varphi}^* + b_i \dot{\varphi}^* S_i = M_i, \quad (6)$$

где $c_i = |J_i v_i|$; $b_i = |(J_{i+2} - J_{i+1}) v_{i+1} v_{i+2}|$; $\ddot{\varphi}^* = |\ddot{\varphi}|$; $S_i = \text{Sign}[M_i v_{i+1} v_{i+2} (J_{i+2} - J_{i+1})]$; $\dot{\varphi}^* = |\dot{\varphi}|$; $M_i^* = |M_i|$ (в дальнейшем для упрощения звездочка при φ , $\dot{\varphi}$ и M_i опущена).

Исследуем влияние различных факторов на знак функции S_i .

При расположении положительной части оси Эйлера во 2, 4, 5, 7 квадрантах произведение $v_i v_{i+1} v_{i+2}$ отрицательно, при совпадении с одной из связанных осей — равно нулю, в остальных случаях — положительно. Последний сомножитель в выражении для S_i также может иметь различные знаки. Если соотношения осевых моментов инерции удовлетворяют неравенствам

$$\text{а) } J_1 < J_3 < J_2, \quad \text{б) } J_2 < J_1 < J_3, \quad \text{в) } J_3 < J_2 < J_1, \quad (7)$$

то для двух осей разность $J_{i+2} - J_{i+1}$ отрицательна.

Если справедливо одно из соотношений

$$\text{а) } J_1 < J_2 < J_3, \quad \text{б) } J_2 < J_3 < J_1, \quad \text{в) } J_3 < J_1 < J_2,$$

то разность $J_{i+2} - J_{i+1}$ отрицательна лишь для одной из связанных осей.

Знак произведения $(J_{i+2} - J_{i+1}) v_{i+1} v_{i+2}$ обусловлен начальными и конечными условиями, а также свойствами л.а. Знак момента M_i при разгоне л.а. следует считать положительным, а при торможении отрицательным.

При равенстве нулю одного из сомножителей, стоящих под знаком Sign , функция S_i равна нулю, что приводит к упрощению или вырождению некоторых из уравнений Эйлера (3). Пока же предположим, что $S_i \neq 0$.

3. Назовем определяющей ось момента, принимающего в процессе всего разворота свою максимальную величину M_m , т. е.

$$M_i = \begin{cases} M_{mi} \text{Sign } v_i & \text{до переключения,} \\ -M_{mi} \text{Sign } v_i & \text{после переключения.} \end{cases} \quad (8)$$

В работах ^(2, 3) показано, что среди возможных оптимальных по быстродействию управлений при экстенсивном развороте имеется такое, когда момент по определяющей оси включен в кусочно-непрерывном режиме с одним переключением за время разворота. Отметим, что это справедливо лишь в случае, когда определяющая ось в процессе движения не меняется. Однако факт оптимальности экстенсивного управления с одним переключением по определяющей оси будем считать доказанным ^(2, 3).

Предположим, что определяющая ось уже выбрана. До и после переключения момента движение л.а. описывается одними и теми же уравнениями (6), однако знак S_i меняется на обратный. В связи с этим необходимо рассматривать два случая: 1) функция S_i меняет знак с минуса на плюс, 2) с плюса на минус.

Формулу (4) перепишем в виде

$$\text{tg } \theta = J_r \dot{\varphi}^2 / J_r \ddot{\varphi}. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (6), можно получить

$$d\theta / \cos^2 \theta \sqrt{\text{tg } \theta (c_i / J_r + b_i S_i / J_r)} = 2 \sqrt{M_{mi} J_r} dt / c_i. \quad (10)$$

После интегрирования по частям имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \begin{cases} (c_i J_r \sin^2(ht))/J_r b_i & \text{при } S_i < 0, \\ (c_i J_r \operatorname{sh}^2(ht))/J_r b_i & \text{при } S_i > 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $h = \sqrt{M_{mi} b_i / c_i}$.

Считая начальные условия нулевыми, а $M_i = M_{mi}$, можно найти

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} M_{mi} / (c_i \cos^2 ht) & \text{при } S_i < 0, \\ M_{mi} / (c_i \operatorname{ch}^2 ht) & \text{при } S_i > 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} \sqrt{(M_{mi}/b_i)} \operatorname{tg} ht & \text{при } S_i < 0, \\ \sqrt{(M_{mi}/b_i)} \operatorname{th} ht & \text{при } S_i > 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$\varphi = \begin{cases} -(c_i/b_i) \ln |\cos ht| & \text{при } S_i < 0, \\ (c_i/b_i) \ln |\operatorname{ch} ht| & \text{при } S_i > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Исключая время из уравнений (12), (13) и (14), получим

$$\varphi = \begin{cases} (c_i/2b_i) \ln(1 + \varphi^2 b_i / M_{mi}) & \text{для } S_i < 0, \\ -(c_i/2b_i) \ln(1 - \varphi^2 b_i / M_{mi}) & \text{для } S_i > 0, \end{cases} \quad (15)$$

или в другой форме

$$\varphi = \begin{cases} \sqrt{(M_{mi}/b_i) [\exp(2b_i \varphi / c_i) - 1]} & \text{для } S_i < 0, \\ \sqrt{(M_{mi}/b_i) [1 - \exp(-2b_i \varphi / c_i)]} & \text{для } S_i > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Путем аналогичных рассуждений для обращенного движения, т. е. в функции аргумента $\varphi_p - \varphi$ (где φ_p — угол разворота) можно получить:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_p - (c_i/b_i) \ln(1 + \varphi^2 b_i / M_{mi}) & \text{для } S_i < 0, \\ \varphi_p + (c_i/b_i) \ln(1 - \varphi^2 b_i / M_{mi}) & \text{для } S_i > 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$\varphi = \begin{cases} \sqrt{(M_{mi}/b_i) \{\exp[2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i] - 1\}} & \text{для } S_i < 0, \\ \sqrt{(M_{mi}/b_i) \{1 - \exp[-2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i]\}} & \text{для } S_i > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из условия «стыковки» траекторий для $S_i < 0$ и $S_i > 0$, т. е. $\varphi(t_{ni} - 0) = \varphi(t_{ni} + 0)$ и $\dot{\varphi}(t_{ni} - 0) = \dot{\varphi}(t_{ni} + 0)$, где индексом n обозначены координаты переключения i -го управляющего двигателя с разгона на торможение, и (13), (14) можно получить время разворота T_i в обоих случаях движения:

$$T_i = (1/2h) \{ \arccos[\exp(2b_i \varphi_p / c_i)] + \operatorname{arch}[\exp(2b_i \varphi_p / c_i)] \}.$$

Аналогично, из уравнений (15) — (18) получаем:

а) для первого случая движения

$$\varphi_{ni} = (c_i/2b_i) \ln \{2[1 + \exp(-2b_i \varphi_p / c_i)]^{-1}\}; \quad (19)$$

$$\dot{\varphi}_{ni} = \sqrt{(M_{mi}/b_i) [1 - \exp(-2b_i \varphi_p / c_i)] / [1 + \exp(-2b_i \varphi_p / c_i)]}; \quad (20)$$

б) для второго случая движения

$$\varphi_{ni} = -(c_i/2b_i) \ln \{2[1 + \exp(2b_i \varphi_p / c_i)]^{-1}\}; \quad (21)$$

$$\dot{\varphi}_{ni} = \sqrt{(M_{mi}/b_i) [\exp(2b_i \varphi_p / c_i) - 1] / [\exp(2b_i \varphi_p / c_i) + 1]}. \quad (22)$$

Исключая время из уравнений (12) — (14), можно показать, что момент j -й оси (не определяющей) от φ зависит следующим образом:

а) для первого случая движения

$$M_j = M_{mi} \begin{cases} (c_j/c_i) \exp(2b_i \varphi / c_i) + (b_j/b_i) [\exp(2b_i \varphi / c_i) - 1] S_j, \\ -(c_j/c_i) \exp[-2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i] + (b_j/b_i) \{1 - \exp[-2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i]\} S_j; \end{cases} \quad (23)$$

б) для второго случая движения

$$M_j = M_{mi} \left\{ \begin{aligned} & (c_j/c_i) \exp(-2b_i\varphi/c_i) + (b_j/b_i) [1 - \exp(-2b_i\varphi/c_i)] S_j, \\ & - (c_j/c_i) \exp[2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i] + (b_j/b_i) \{ \exp[2b_i(\varphi_p - \varphi)/c_i] - 1 \} S_j. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Как видно из формул (23) и (24), наличие сомножителя S_j увеличивает количество возможных вариантов движения до четырех (по два в каждом случае).

4. При выборе определяющей оси необходимо руководствоваться тем, что движение должно быть полностью управляемо при ограниченности моментов двигателей.

Учитывая условия невыхода моментов в процессе разворота за рамки допустимых ($|M_j| \leq M_{mj}$) и подставляя значение M_j из (23), (24), после преобразований можно получить:

а) для первого случая движения

$$\varphi_m \leq \begin{cases} (c_i/2b_i) \ln [(M_{mj}/M_{mi} + b_j S_j/b_i) / (c_j/c_i + b_j S_j/b_i)], \\ (c_i/2b_i) \ln [(M_{mj}/M_{mi} - b_j S_j/b_i) / (-c_j/c_i - b_j S_j/b_i)]; \end{cases} \quad (25)$$

б) для второго случая

$$\varphi_m \geq \begin{cases} - (c_i/2b_i) \ln [(M_{mj}/M_{mi} - b_j S_j/b_i) / (c_j/c_i - b_j S_j/b_i)], \\ - (c_i/2b_i) \ln [(M_{mj}/M_{mi} + b_j S_j/b_i) / (-c_j/c_i + b_j S_j/b_i)], \end{cases} \quad (26)$$

где φ_m — значение координаты φ на границе интервала знакопостоянства функции M_j ($\varphi_m = 0$, φ_n — учитывая монотонность экспоненциальных функций (23), (24)).

5. Таким образом, основные этапы реализации оптимального по быстродействию экстенсивного разворота могут быть определены следующим образом:

а) обработка исходных данных на разворот (определение направляющих косинусов по начальным и конечным условиям ⁽¹⁾);

б) определение первого ряда коэффициентов (J_r , J_k , b_i , c_i , S_i — формулы (6));

в) нахождение определяющей оси путем проверки выполнения неравенств (25), (26);

г) нахождение коэффициентов в формулах (15) — (18) для текущих фазовых координат разворота;

д) организация управления согласно зависимостям (8), (19), (20), (23), (24).

Рассмотренный выше алгоритм позволяет построить экстенсивное управление в функции фазовых координат разворота в отличие от временных программ, известных ранее ⁽²⁾. Это дает возможность создать замкнутое по углу и угловым скоростям управление и соответственно повысить точность, устойчивость и т. д. системы управления пространственным разворотом.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Бранец, Н. П. Шмыглевский, Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела, М., «Наука», 1973. ² Б. Н. Петров, В. А. Боднер, К. Б. Алексеев, ДАН, т. 192, № 6 (1970). ³ В. П. Аноров, В. Н. Коровин, Автоматика и телемеханика, № 4 (1970).