

Н. В. НИКОЛЕНКО

# ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IX 1975)

За последние годы в теории нелинейных одномерных волновых процессов был достигнут существенный прогресс.

В работе <sup>(1)</sup> было установлено существование счетного числа независимых интегралов уравнения Кортевега — де Фриза. Е. В. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым было показано, что уравнение Кортевега — де Фриза в пространстве функций, быстро исчезающих на бесконечности, является вполне интегрируемой гамильтоновой системой (см. <sup>(2)</sup>). В работе С. П. Новикова <sup>(3)</sup> установлена связь между конечнозонными потенциалами и  $n$ -солитонными аналогами решений уравнения Кортевега — де Фриза в случае периодических граничных условий. Во всех этих работах применялся метод обратной задачи теории рассеивания.

В настоящей работе с помощью бесконечного варианта метода ускоренной сходимости А. Н. Колмогорова (см. <sup>(4)</sup>) доказывается полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{k=1}^{\infty} f_k u^k \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x+2\pi, y, t) \equiv u(x, y, t) \equiv u(x, y+2\pi, t) \quad (2)$$

в некоторой окрестности нулевого решения.

В качестве функционального пространства для уравнения Шредингера мы возьмем банахово пространство  $U$   $2\pi$ -периодических по  $x$  и по  $y$  комплекснозначных функций

$$u(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-2} u_{n, m} e^{i(nx+my)}$$

таких, что ряд  $\sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} |u_{n, m}|$  сходится с нормой

$$\|u(x, y)\|_U = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} |u_{n, m}|.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть коэффициент  $f_1$  является иррациональным вещественным числом, плохо аппроксимируемым рациональными числами  $m/n$ ,  $n \neq 0$ , т. е.

$$|f_1 - m/n| \geq c/|n|^3 \quad (3)$$

для некоторого  $c > 0$ .

Тогда гладкой заменой переменных  $u = v + h(v)$  с тождественной в нуле линейной частью уравнение (1), (2) в некоторой окрестности нуля банахо-

ва пространства  $U$  приводится к линейному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + f_1 v. \quad (4)$$

Доказательство. Существование замены переменных  $u = v + h(v)$  докажем методом ускоренной сходимости. В обозначениях

$$A = -i(\Delta + f_1), \quad \Phi(u) = -i \sum_{k \geq 2} f_k u^k$$

уравнение (4), (2) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = Au + \Phi(u) \quad (5)$$

в банаховом пространстве  $U$ .

Под действием замены переменных  $u = H(v) = v + h(v)$  уравнение (5) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \left( \frac{dH^{-1}}{dv} \circ (A + \Phi) \circ H \right) (v),$$

где  $dH/dv$  — производная Фреше нелинейного оператора  $H: U \rightarrow U$ .

Нас интересует решение уравнения

$$\frac{dH^{-1}}{dv} \circ (A + \Phi) \circ H = A. \quad (6)$$

Линеаризованное по  $h$  и по  $\Phi$  уравнение (6) в окрестности точки  $H = I$ ,  $\Phi = 0$  имеет вид

$$[Av, h(v)] + \Phi(v) = 0, \quad [Av, h(v)] = \frac{dAv}{dv} h(v) - \frac{dh(v)}{dv} Av, \quad (7)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — скобка Пуассона векторных полей  $Av$  и  $h(v)$ .

Обозначим через

$$\Psi(\Phi, h) = \frac{dH^{-1}}{dv} \circ (A + \Phi) \circ H - A - \Phi - [Av, h(v)]$$

нелинейную часть векторного поля  $\frac{dH^{-1}}{dv} \circ (A + \Phi) \cdot H$ . В качестве прибли-

женного решения уравнения (6) возьмем  $h_0 = 0$ ,  $\Phi_0 = \Phi$ , найдем  $h_1$  из уравнения  $[Av, h_1(v)] + \Phi_0(v) = 0$  и положим  $\Phi_1 = \Psi(\Phi_0, h_1)$ . Если уже известны  $\Phi_n, h_n$ , то  $h_{n+1}$  находим из уравнения  $[Av, h_{n+1}(v)] + \Phi_n(v) = 0$  и полагаем  $\Phi_{n+1} = \Psi(\Phi_n, h_{n+1})$ .

Простое вычисление показывает, что

$$\Psi(\Phi, h) = \sum_{n \geq 0} \left( -\frac{dh}{dv} \right)^n \{ \Phi(v + h(v)) - \Phi(v) \}.$$

Так как  $h$  зависит от  $\Phi$ , являясь решением уравнения (7), то мы можем ввести обозначение  $\mathcal{L}\Phi = \Psi(\Phi, h)$ .

Нам нужно показать, что  $\Phi_n = \mathcal{L}^n \Phi \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При фиксированном  $v \in U$   $h(v)$  является элементом пространства  $U$ . Обозначим через  $h(v)_{n,m}$   $n, m$ -ю компоненту функции  $h(v)(x, y)$  в координатах Фурье,

$$h(v)(x, y) = \sum_{n, m = -\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 h(v)_{n,m} e^{i(nx + my)}.$$

Непосредственная проверка показывает, что все операторы  $h_k, \Phi_k$  удовлетворяют перечисленным ниже условиям:

1) оператор  $h = \sum_{k \geq 2} h_k: U \rightarrow U$  является суммой однородных операторов  $h_k$  степени  $k$ ;

$$2) \quad h_k(v)_{n,m} = \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ q_1 + \dots + q_k = m}} h_{p_1, \dots, p_k}^{n, m} v_{p_1 q_1} \dots v_{p_k q_k}, \quad h_{p_1, \dots, p_k}^{n, m} \text{ — комплексные числа};$$

3) для каждого  $k \geq 2$  существует  $h_k \geq 0$  такое, что  $\left| h_{p_1, \dots, p_k}^{n, m} \right| \leq h_k$  для всех целых  $p_i, q_i, n, m$  и радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{k \geq 2} h_k x^k$  больше нуля. Положим

$$\|h(v)\|_r = \sup_{\|v\| \leq r} \|h(v)\|_v.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Если оператор удовлетворяет условиям 1)–3), то для  $\theta \in (0, r), r < 1$ , справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|h(v)\|_r &\leq \sum h_k r^k, \\ \left\| \frac{d^n h}{dv^n} \right\|_{r-\theta} &\leq \sum_{k \geq n} k(k-1) \dots (k-n) h_k r^{k-n} \leq \frac{n! \|h\|_r}{\theta^n}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Если оператор удовлетворяет условиям 1)–3), то оператор  $h$ , являющийся решением уравнения (7), также удовлетворяет им и

$$\|h(v)\|_{r-\theta} \leq 4c^{-1} \theta^{-2} \|\Phi(v)\|_r. \quad (8)$$

В доказательстве леммы 2 мы, пользуясь неравенством (3), получаем для однородных составляющих  $h_k, \Phi_k$  операторов  $h, \Phi$  оценки

$$\|h_k(v)\| \leq c^{-1} k^2 \|\Phi_k(v)\|,$$

из которых вытекает неравенство (8).

Пусть оператор  $\Phi: U \rightarrow U$  удовлетворяет условиям 1)–3). Введем обозначение  $\varepsilon = \|\Phi(v)\|_r$ . Пользуясь леммами 1, 2, получаем

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}\Phi)(v)\|_{r-\theta} &\leq \left\| \sum_{n \geq 0} \left( -\frac{dh}{dv} \right)^n \{ \Phi(v+h(v)) - \Phi(v) \} \right\|_{r-\theta} \leq \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{dh}{dv} \right\|_{r-\theta} \left\| \sum_{n \geq k} \frac{1}{n!} \frac{d^n \Phi}{dv^n} h(v)^n \right\|_{r-\theta} \leq \varepsilon \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\varepsilon}{4c\theta^3} \right)^n = \frac{\varepsilon^2}{4c\theta^3} \frac{1}{1 - \varepsilon/4c\theta^3}. \end{aligned}$$

Положим  $\varepsilon = r^{1/2}$ ,  $\varepsilon_n = \varepsilon_0^{(4/3)^n}$ ,  $\theta_n^3 = \beta^3 \varepsilon_n^{1/2}$ . Пусть  $\beta, r > 0$  достаточно малы и  $\Phi$  — нелинейный оператор, стоящий в правой части уравнения, полученного из (5) заменой переменных  $u = (I+h_1) \circ (I+h_2)(v)$ . Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n \Phi\|_{r/2} &\leq \frac{4\varepsilon_{n-1}^{1/2}}{\beta^3} \leq \varepsilon_n, \\ \left\| \frac{d^2 h_n}{dv^2} \right\|_{r/3} &\leq \left( \frac{12}{r} \right)^4 \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Пользуясь ими, получаем, что  $\|\Phi_n\|_{r/2} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и что отображение  $H = (I + h_1) \circ (I + h_2) \circ \dots$  является диффеоморфизмом класса  $C_1$  некоторой окрестности нуля банахова пространства  $U$  на свой образ.

Заменой переменных  $u = H(v)$  уравнение (1), (2) приводится в некоторой окрестности нуля в  $U$  к линейному уравнению Шредингера (4).

**Следствие.** *Нелинейное уравнение Шредингера (1), (2) является бесконечномерной вполне интегрируемой гамильтоновой системой в некоторой окрестности  $S$  нуля банахова пространства  $U$ .*

*Фазовый портрет уравнения (1), (2) в  $S$  расслоен на конечномерные и счетномерные инвариантные торы, заполненные семействами условно периодических траекторий.*

*Инвариантные торы размерности  $n$  уравнения (1), (2) образуют  $n$ -параметрические семейства.*

**Замечание.** Если  $f_1$  — рациональное число, то неединственность решений некоторых диофантовых уравнений, связанных с задачей, указывает на неинтегрируемость уравнения (1), (2).

Ростовский государственный  
университет

Поступило  
5 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> C. S. Gardner, J. M. Greene et al., Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095 (1967). <sup>2</sup> Е. В. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Функци. анализ и его прилож., т. 5, 4, 18 (1971). <sup>3</sup> С. П. Новиков, там же, т. 8, 3, 54 (1974). <sup>4</sup> А. Н. Колмогоров, ДАН, т. 96, № 4, 527 (1954).