

УДК 517.95

МАТЕМАТИКА

О. Ф. МЕНЬШИХ

О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДИНАКОВЫМИ ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 19 XI 1975)

1. Рассмотрим систему квазилинейных уравнений, имеющую одинаковые главные части ⁽¹⁾:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \quad i=1, \dots, n+1, \quad (1,1)$$

где $a_k = a_k(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ — достаточно гладкие функции. Ниже всюду предполагается локальная точка зрения.

Определение 1 ^(2, 3). Бегущей волной ранга r называется такое частное решение системы (1,1), на котором общий ранг матрицы

$$M_1 = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_n} \end{array} \right\| \quad (1,2)$$

равен r , $1 \leq r \leq n$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Все решения системы (1,1) являются бегущими волнами ранга r и могут быть записаны в виде

$$x_k = a_k t + f_k(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}; u_1, u_2, \dots, u_r); \quad (1,3)$$

$$u_{r+j} = \omega_j(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad k=1, \dots, r; \quad j=1, \dots, n-r+1; \quad (1,4)$$

$$c_\alpha = x_{r+\alpha} - a_{r+\alpha} t, \quad \alpha=1, \dots, n-r,$$

где f_k и ω_j — произвольные функции, причем

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_r)} \neq 0. \quad (1,5)$$

2. Система (1,1) является симметрической системой ⁽¹⁾, поэтому для нее можно поставить задачу Коши

$$t=0: \quad u_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, \dots, n+1. \quad (2,1)$$

Пусть общий ранг матрицы

$$M_2 = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right\|, \quad i=1, \dots, n+1; \quad k=1, \dots, n,$$

равен r . Тогда (2,1) можно записать так:

$$\begin{aligned} t=0: \quad u_\alpha &= g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \alpha=1, \dots, r, \\ u_{r+j} &= h_j(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad j=1, \dots, n-r+1, \end{aligned} \quad (2,2)$$

где

$$h_j = g_{r+j}(x_1(u_1, \dots, u_r), x_2(u_1, \dots, u_r), \dots, x_r(u_1, \dots, u_r); x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Справедлива

Теорема 2. Решение задачи Коши (1,1), (2,2) определяется формулами

$$u_k = g_k(s_1, s_2, \dots, s_n), \quad k=1, \dots, r; \quad (2,3)$$

$$u_{r+j} = h_j(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad j=1, \dots, n-r+1; \quad (2,4)$$

$$s_\beta = x_\beta - a_\beta t, \quad \beta=1, \dots, n.$$

3. Пусть в системе (1,1) число функций u_i равно m , причем $m < n+1$. Бегущие волны ранга r такой системы при $r < m$ определяются формулами (1,3), (1,4) (при этом $j=1, \dots, m-r$). Если

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)} \neq 0, \quad (3,1)$$

то общее решение системы (1,1) описывается формулами (1,3) (при этом $r=m$). Этот класс решений не является бегущей волной.

Задача Коши для системы (1,1) при $m < n+1$ определяется формулами, аналогичными (2,3), (2,4) или (2,3), если имеет место (3,1) ($r=m$).

Замечание 1. В ⁽⁴⁾ была проинтегрирована система уравнений

$$u_i + \varphi(u) u_x + \psi(v) u_y = 0,$$

$$v_i + \varphi(u) v_x + \psi(v) v_y = 0,$$

являющаяся частным случаем рассмотренных выше систем.

4. В качестве примера рассмотрим систему уравнений, описывающую пространственное нестационарное движение (политропный процесс) газа с переменной энтропией в случае постоянного давления (одномерный и плоский случаи рассмотрены в ⁽⁴⁾). Указанная система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0; \quad i=1, 2, 3; \quad (4,1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (4,2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0, \quad (4,3)$$

где u_k — проекции вектора скорости $\mathbf{u}$ на оси декартовой системы координат x_i , $i=1, \dots, 3$, t — время, ρ — плотность газа.

Подсистема (4,1) имеет одинаковые главные части. Необходимо исследовать на совместность (4,1), (4,2), затем решить (4,3) относительно ρ .

5. Приведем окончательные результаты в зависимости от ранга матрицы M_1 (по формуле (1,2)) подсистемы (4,1).

а) Ранг $M_1=1$:

$$u_{k+1} = \omega_k(u_1), \quad \rho = \omega_3(T_1, T_2, u_1), \quad \omega_k(u_1, \Pi_1, \Pi_2) = 0; \quad (5,1)$$

$$T_k = x_i u_{k+1} - x_{k+1} u_i, \quad \Pi_i = x_{i+1} - u'_{i+1} x_1 + (u_1 u'_{i+1} - u_{i+1}) t,$$

$$i=1, 2; \quad k=1, 2; \quad u'_{i+1} = \frac{du_{i+1}}{du_1},$$

ω_α — произвольные функции, $\alpha=1, \dots, 4$;

$$\frac{\partial \omega_4}{\partial u_1} \neq 0.$$

б) Ранг $M_1=2$:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0.$$

$$x_i = u_i t + \lambda_i(u_1, u_2, z), \quad i=1, 2; \quad (5,2)$$

$$\lambda_1 = z\mu_2 - \mu_1\lambda_2 + \mu_3, \quad z = x_3 - u_3 t, \quad \mu_k = \mu_k(u_1, u_2), \quad k=1, 2, 3. \quad (5,3)$$

Относительно λ_2 получено уравнение

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial z} = \frac{\alpha_{11}z + \alpha_{12}\lambda_2 + \alpha_{13}}{\alpha_{21}z + \alpha_{22}\lambda_2 + \alpha_{23}}, \quad (5,4)$$

общий интеграл которого выписывается в замкнутой форме,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1}, & \alpha_{12} &= -\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1}, & \alpha_{13} &= \mu_2 \frac{\partial \mu_3}{\partial u_1}, & \alpha_{21} &= -\alpha_{12}, \\ \alpha_{22} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \mu_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1}, & \alpha_{23} &= \mu_1 \frac{\partial \mu_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \mu_3}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

Функции μ_1 и μ_2 связаны уравнением

$$\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u_1} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial u_2} = 0. \quad (5,5)$$

Интегрированием вполне интегрируемой системы

$$\frac{\partial u_3}{\partial u_1} = \frac{1}{\mu_2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial u_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \mu_2 \neq 0, \quad (5,6)$$

определяется $u_3 = u_3(u_1, u_2)$.

Обращением формул (5,2) определяются u_1 и u_2 ; при этом

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0, \quad (5,7)$$

$$\rho = \Phi(u_1, u_2, z),$$

Φ, μ_3 — произвольные функции.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что если ранг $M_1=3$, то система (4,1), (4,2) несовместна.

Выражаю сердечную благодарность акад. Н. Н. Яненко за интерес к работе и поддержку.

Куйбышевский авиационный институт
им. С. П. Королева

Поступило
30 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964. ² Ю. Я. Погодин, В. А. Сучков, Н. Н. Яненко, ДАН, т. 119, № 3 (1958). ³ Н. Н. Яненко, Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, т. 2, Л., «Наука», 1964. ⁴ W. F. Noh, M. H. Protter, J. Math. and Mech., v. 12, № 2 (1963).