

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

С. А. ТЕРСЕНОВ

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 I 1975)

Проблеме аналитичности решений эллиптических и параболических уравнений посвящено довольно много работ (см. ⁽¹⁻¹³⁾). В этих работах в основном исследуется аналитичность решений в окрестности точек, где уравнение не вырождается. В ряде работ (см. ⁽⁵⁻¹²⁾) рассматривалась также аналитичность решений вплоть до многообразий вырождения.

В настоящей заметке исследуется аналитичность решений некоторых классов эллиптических и параболических уравнений вплоть до гиперплоскостей вырождения, а также в областях, содержащих их внутри себя.

1. Рассмотрим эллиптическую систему уравнений

$$L(u) = u u_{vv} + A u_v A^{ij} u_{x_i x_j} + B^i u_{x_i} + C u = F \quad (1)$$

в области $K: y^2 + |x|^2 \leq \varepsilon^2, y \geq 0$, которая вырождается при $y=0$;

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad |x|^2 = \sum_{s=1}^n x_s^2.$$

В (1) по индексам i и j ведется суммирование от 1 до n . Будем считать, что дифференциальный оператор $A^{ij} u_{x_i x_j}$ является сильно эллиптическим, а коэффициенты $A(x, y)$, $A^{ij}(x, y)$, $B^i(x, y)$, $C(x, y)$, $F(x, y)$ — аналитические функции в $\bar{K}$. Как показано в ⁽⁹⁾, если матрицы $A-E$, $M = -A_{x_i x_j}^{ij} + B_{x_i}^i + A_y - 2C$ (E — единичная матрица) положительно определенные, то ограниченное в $\bar{K}$ решение u системы (1) будет аналитическим в $\bar{K}$. Условие неотрицательной определенности матрицы $A-E$ является существенным и нетрудно видеть, что в противном случае существуют ограниченные, но не аналитические решения. Но в этом случае оказывается, если мы потребуем, кроме ограниченности решения вплоть до $y=0$, еще ограниченность вполне определенного количества производных по x, y , то решение становится аналитическим.

Теорема 1. Пусть A, A^{ij}, B^i, C являются симметрическими матрицами и аналитичны в $\bar{K}$. Пусть $N \geq 0$ — (наименьшее) целое число такое, что матрицы

$$A + (N-1)E, \quad M - 2NA_y \quad (2)$$

положительно определенные в $\bar{K}$.

Тогда, если решение $u(x, y)$ системы (1) имеет в $\bar{K}$ непрерывные в смысле Гёльдера производные $\partial_y^N u$, $\partial_y^s \partial_{x_i}^p u$, $s \leq N-1, |p| \leq 2$, то $u(x, y)$ аналитична в $\bar{K}$.

Здесь и в дальнейшем для удобства иногда будем производные по y и $x_1, \dots, x_n$ обозначать через ∂_y, ∂_x .

Для доказательства рассмотрим одновременно следующие системы уравнений:

1) систему уравнений для функций $v = \partial_y^N u$

$$L(v) + NA_y v + Nv_y = \Phi(F, u), \quad (3)$$

которая получается взятием N -й производной по y от (1), где $\Phi(F, u)$ является линейной комбинацией функций $\partial_y^s \partial_x^p u$, $s \leq N-1$, $|p| \leq 2$;

2) систему уравнений для функций $u_k(x) = \partial_y^k u(x, y)$ при $y=0$:

$$A_0^{ij}(x) u_{kx_j} + B_0^i(x) u_{kx_i} + C_k(x) u_k = -(A_0(x) + kE) u_{k+1} + \Phi_k(u_0, \dots, u_{k-1}), \quad (4)$$

$k = N-1, N-2, \dots, 0$. Для получения этой системы нужно взять от (1) производные по y до $N-1$ порядка включительно и положить в каждом из них $y=0$. Выражения Φ_k — линейные комбинации от функций $\partial_x^p u_s$, $|p| \leq 2$, $s=0, \dots, k-1$, A_0^{ij} , B_0^i , C_k — значения функций A^{ij} , B^i и $C + kA_y$ при $y=0$.

На основании гладкости решений систем уравнений (3) и (4) в зависимости от гладкости правых частей (¹², ¹³) сначала доказывается, что $u = C^\infty(\bar{K})$.

Схема доказательства. Если $\partial_y^s \partial_x^p u \in W_2^l$, $s \leq N-1$, $|p| \leq 2$, то из (3) следует, что (по крайней мере) $v \in W_2^{l+1}$. На основании этого из (4)

имеем, что $u_k \in W_2^{l+1}$, $k \leq N-1$, а в силу формулы Тейлора получим, что

$\partial_y^s \partial_x^p u \in W_2^{l+1}$, $s \leq N-1$, $|p| \leq 2$. Повторяя этот процесс в силу теорем вложения Соболева будем иметь, что $u \in C^\infty(\bar{K})$. Далее, используя коэрцитивные неравенства в соответствующих пространствах Соболева с весом (¹², ¹³) и следуя (⁹), получаем оценки u в W_2^l для всех $l \geq 0$, из которых следует аналитичность $u(x, y)$.

Следствие. В системе (1) сделаем замену $2\sqrt{y} = t$. Тогда (1) примет вид

$$u_{tt} + A^{ij} u_{x_j x_i} + B^i u_{x_i} + (2A - E) t^{-1} u_t + Cu = F. \quad (5)$$

Коэффициенты A^{ij} , B^i , $2A - E$, C , F будут аналитическими функциями от x и t^2 .

Продолжив четно на значения $t < 0$, можем считать их аналитическими относительно x и t внутри сферы K_0 : $t^2 + |x|^2 \leq \varepsilon^2$. Введем обозначение $D_t = -t^{-1} \partial_t$. Тогда, если будут выполнены условия (2) в $\bar{K}_0$ ($A_y = 2t^{-1} A_t$) и решение уравнения (5) в $\bar{K}_0$ имеет непрерывные в смысле Гёльдера производные $D_t^s \partial_x^p u$, $s \leq N-1$, $|p| \leq 2$, $D_t^N u$, то u аналитично в $\bar{K}_0$.

2. В этом пункте укажем одну формулу, которую в частности, можно использовать для доказательства аналитичности решений некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрим две системы уравнений

$$\sum_{s=1}^m \left(y_s \frac{\partial^2 u}{\partial y_s^2} + \alpha_s \frac{\partial u}{\partial y_s} \right) + L(u) = f; \quad (6)$$

$$\sum_{s=1}^l \left(y_s \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_s^2} + {}^{1/2} \frac{\partial \omega}{\partial y_s} \right) + L_l(\omega) = \varphi, \quad l \leq m, \quad (7)$$

где

$$L_l(\omega) = \sum_{s=l+1}^m \left(y_s \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_s^2} + \alpha_s \frac{\partial \omega}{\partial y_s} \right) + L(\omega),$$

α_s — постоянные, L — линейный оператор произвольного порядка по переменным $x_1, \dots, x_n$, коэффициенты которого зависят только от x . В дальнейшем $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Лемма. Если $\alpha_s > 1/2$, $s=1, 2, \dots, l$, то между решениями уравнений (6) и (7), удовлетворяющих условию

$$\sqrt{y_s} v_s = 0 \quad \text{при } y_s = 0, s=1, 2, \dots, l, \quad (8)$$

существует взаимно однозначное соответствие, определенное формулой

$$u(x, y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \omega(x, \tau y) \prod_{s=1}^l \tau_s^{-1/2} (1-\tau_s)^{\alpha_s-1/2} d\tau_1 \dots d\tau_l, \quad (9)$$

$$\omega(x, \tau y) = \omega(x, \tau_1 y_1, \dots, \tau_l y_l, y_{l+1}, \dots, y_m),$$

$\varphi(x, y)$ однозначно определяется решением системы интегральных уравнений Абеля

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(x, \tau y) \prod_{s=1}^l \tau_s^{-1/2} (1-\tau_s)^{\alpha_s-1/2} d\tau_1 \dots d\tau_l = f(x, y). \quad (10)$$

Формула обращения уравнения (10) строится обычным путем. Очевидно, что если $f(x, y)$ — аналитическая функция, то и $\varphi(x, y)$ будет аналитической. Формула (10) остается в силе и в том случае, если некоторые из $\alpha_s = 1/2$. В этом случае в (10) по соответствующей переменной y_s не берется интеграл. Для частных случаев формулы, аналогичные (10), имеются в различных работах (7-11).

1) Пусть в (6) L — строго эллиптическая система дифференциальных операторов второго порядка, коэффициенты которой и функция f являются аналитическими функциями в K_l :

$$\sum_{s=1}^l y_s^2 + \sum_{s=l+1}^m (y_s - y_s^0)^2 + |x|^2 \leq \varepsilon^2, \quad y_s^0 > 0, \quad s \geq l+1, \quad y_s \geq 0, \quad s \leq l.$$

Теорема 2. Пусть $\alpha_s = -\nu_s + \beta_s$, $0 < \beta_s < 1$, $s=1, \dots, l$, где $\nu_s \geq 0$ — целые числа.

Тогда, если решение $u(x, y)$ системы (6) имеет в K_l непрерывные производные $\partial_y^{\nu_s} u$, $\partial_y^p \partial_x^q u$,

$$|q| \leq 2, \quad |p| \leq \sum_{s=1}^l p_s, \quad p_s \leq \nu_s, \quad |\nu| = \sum_{s=1}^l (\nu_s + 1),$$

то $u(x, y)$ аналитична в $\bar{K}_l$.

В самом деле, функция $\partial_y^{\nu_s} u$ будет удовлетворять системе уравнений вида (6), которая удовлетворяет условиям леммы. Так как решения уравнения (7) при условиях (8) будут аналитическими в $\bar{K}_l$, то из (9) следует аналитичность $\partial_y^{\nu_s} u$. Как и в теореме 1, система функций

$$u_p(x) = \partial_y^p u(x, 0), \quad |p| \leq \sum_{s=1}^l p_s, \quad p_s \leq \nu_s,$$

будет удовлетворять некоторой эллиптической системе уравнений с аналитическими коэффициентами. Поэтому $u_p(x)$ будут аналитическими функциями, а из соответствующей формулы Тейлора будет следовать аналитичность $u(x, y)$.

2) Пусть теперь в (6) $L(u) = L_0(u) - \partial u / \partial t$ и коэффициенты строго эллиптического оператора L_0 суть аналитические функции от x . И в этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Если $\alpha_s \geq 1$, $s=1, \dots, l$, $l \leq m$, то всякое регулярное в $\Omega = K_l \times (0, T)$ и ограниченное в $\bar{\Omega}$ решение системы (6) является аналитическим в $\bar{\Omega}$ ($t > 0$) по пространственным переменным.