

В. Н. СТРАХОВ, М. И. ЛАПИНА

МОНТАЖНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 2 XII 1975)

1. В настоящее время решение обратной задачи гравиметрии осуществляется обычно методом подбора по стандартной схеме, содержащей три принципиальных компонента: а) параметрический класс P , в котором ищется распределение источников поля; б) задачу оптимизации, из решения которой ищутся значения параметров, характеризующих оптимальное решение в P ; в) алгоритм решения задачи оптимизации.

Основные идеи, реализуемые в стандартной схеме метода подбора, — это идеи параметризации, оптимизации и регуляризации. Ясно, что они имеют фундаментальное значение, однако можно сомневаться в том, что форма, в которой они в настоящее время используются, является единственно возможной. В настоящей статье приводятся результаты, свидетельствующие о возможности и перспективности нового (предложенного В. Н. Страховым) подхода к решению обратной задачи гравиметрии методом подбора. Основу подхода образуют два предложения: 1) использовать новые классы P искомых решений, которые мы называем монтажными; 2) использовать новый принцип построения решений в выделенных классах, который мы также называем монтажным. Монтажные классы и монтажный принцип построения решений тесно связаны, образуя единую основу алгоритмов подбора нового типа, которые в некотором смысле аналогичны методу динамического программирования.

2. Задачу нахождения источников гравитационного поля можно расчленить на две: 1) задачу нахождения носителя N_p масс, 2) задачу нахождения распределения масс по носителю N_p . Носитель масс можно искать либо в форме совокупности изменяющихся (непрерывно) объемов, характеризующихся значениями непрерывно изменяющихся параметров, либо в форме фигур, составленных из некоторых априорно задаваемых элементов. Последний подход и лежит в основе выделения монтажных классов. Пусть V_0 — некоторый (конечный или бесконечный) объем в n -мерном пространстве, которому заведомо принадлежит носитель масс. Пусть Z_0 — замощение объема V_0 по семейству попарно не пересекающихся объемов $\{v_\alpha\}$, $\alpha \in A$ (конечному, если объем V_0 конечный, и счетному, если объем V_0 бесконечный), т. е. $Z_0 = \bigcup_{\alpha \in A} \bar{v}_\alpha$ (черта сверху обозначает замыкание), причем: а) Z_0 покрывает V_0 ; б) любая точка $p \in V_0$ принадлежит либо одному v_α , либо сразу нескольким $\bar{v}_\alpha$; в) для любого $\alpha \in A$ v_α имеет точки, принадлежащие V_0 . Пусть $A_k \subset A$ — подмножество индексов α ; множество $\tau_k = \bigcup_{\alpha \in A_k} \bar{v}_\alpha$, обладающее некоторым свойством R , назовем R -конфигурацией в Z_0 .

Пусть τ_k — некоторая R -конфигурация в Z_0 , являющаяся носителем масс, распределенных по τ_k с заданным законом $\rho(\mathbf{q}_m)$, $\mathbf{q}_m$ — вектор параметров (закон, в частности, может задаваться некоторой функцией от α , когда в пределах v_α с фиксированным α плотность масс постоянная, но изменяется при переходе от элемента к элементу). Закон $\rho(\mathbf{q}_m)$ будем называть конфигурационным, распределение масс по R -конфигурации

τ_k при заданном конфигурационном законе (параметры его могут быть неизвестными!) назовем конфигурационным.

Определение 1. Монтажный класс M искомым решением — это совокупность всевозможных конфигурационных распределений масс, при заданном замещении Z_0 , семействе $\{v_\alpha\}$, свойстве конфигурации R , конфигурационным законе, $\rho(\mathbf{q}_m)$ — с неизвестными параметрами $\mathbf{q}_m \in Q_0 \subset R^p$.

Монтажный принцип построения решений в монтажном классе M заключается в следующих положениях: а) построение носителя масс осуществляется путем последовательного присоединения элементов из $\{v_\alpha\}$, образующих заданное замещение Z_0 , к некоторой исходной (задаваемой или определяемой иными средствами) R -конфигурации τ_0 , после присоединения каждого элемента образуется конфигурация, обладающая R -свойством; б) в каждой из промежуточных конфигураций τ_k , $k=1, 2, \dots$, получаемых в процессе построения решения, должен выполняться конфигурационный закон; однако конструируемые последовательно конфигурационные распределения масс не обязаны аппроксимировать истинное распределение масс в пределах (промежуточных) R -конфигураций, это требование предъявляется лишь к окончательному решению в монтажном классе; в) на каждом шаге итерационного процесса построения решения выбор элемента, включаемого в предыдущую R -конфигурацию, т. е. переход от R -конфигурации τ_k к R -конфигурации τ_{k+1} , должен осуществляться на основе некоторого принципа оптимальности.

Пусть τ_k — некоторая R -конфигурация в замещении Z_0 , O_k — множество элементов из $\{v_\alpha\}$, не принадлежащих τ_k , но граничащих с элементами из τ_k по множеству точек плоской меры, большей нуля; множество O_k назовем оболочкой R -конфигурации τ_k . Пусть $\{\lambda_{O_k}\}$ — совокупность множеств элементов из O_k , каждое из которых обладает некоторым заданным свойством T (это свойство может состоять, например, в том, что λ_{O_k} содержит всего один элемент). Назовем множество элементов из Z_0 пробной R -конфигурацией τ_{k+1}^* , если: а) $\tau_{k+1}^* = \tau_k \cup \lambda_{O_k}$; б) τ_{k+1}^* есть R -конфигурация. Распределение масс по τ_{k+1}^* с заданным конфигурационным законом $\rho(\mathbf{q}_m)$, со свободным вектором $\mathbf{q}_m \in Q_0 \subset R^p$ назовем пробным конфигурационным законом.

Обозначим через $\Delta g_{\tau_k}(\mathbf{q}_m)$ вектор значений поля Δg в точках P_j , $j=1, 2, \dots, N$, от масс в R -конфигурации τ_k с конфигурационным законом $\rho(\mathbf{q}_m)$, через $\Delta g_{\tau_{k+1}^*}(\mathbf{q}_m)$ — вектор значений поля Δg в точках P_j от масс в пробной R -конфигурации τ_{k+1}^* с тем же законом. Ясно, что значения вектора параметров $\mathbf{q}_m$ могут быть найдены из условий $\|\Delta g^n - \Delta g_{\tau_{k+1}^*}(\mathbf{q}_m)\| = \min$. Этим определяются оптимальные конфигурационные распределения масс для каждой пробной R -конфигурации.

Определение 2 (принцип оптимальности обратной задачи в монтажном классе). На каждом шаге итерационного процесса построения решения в избранном монтажном классе M к R -конфигурации τ_k присоединяется то множество элементов λ_{O_k} (обладающее T -свойством) из оболочки O_k этой R -конфигурации, для которой величина

$$\Phi(\tau_{k+1}^*) = \min_{\mathbf{q}_m} \|\Delta g^n - \Delta g_{\tau_{k+1}^*}(\mathbf{q}_m)\| \quad (1)$$

достигает наименьшего значения*.

3. Приведем пример конкретного алгоритма, основанного на описанных выше основных положениях, и некоторые результаты его опробования на

* Иначе говоря, за τ_{k+1} принимается та же пробная τ_{k+1}^* R -конфигурация, которая при предписанном конфигурационном законе обеспечивает наилучшее удовлетворение экспериментальным данным.

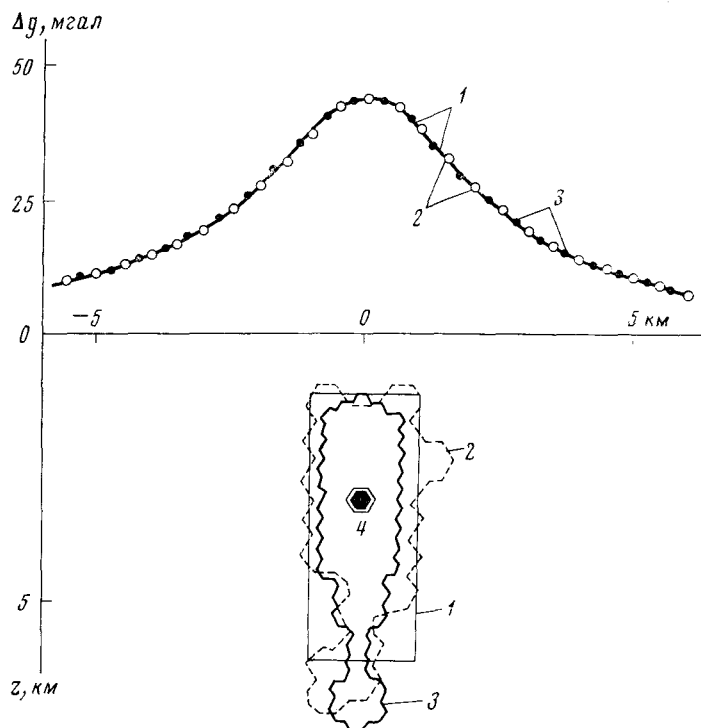


Рис. 1. Результаты решения обратной задачи методом РНК на теоретическом примере вертикальной прямоугольной призмы с плотностью $\delta=1,0$; шаг задания поля $\Delta x=0,25$. 1 – теоретическая кривая Δg и контур сечения призмы; 2 – выбранное поле Δg и контур соответствующей конфигурации, $R=0,4$, $\delta=1,1$; 3 – выбранное поле Δg и контур конфигурации при $R=0,2$, $\delta=1,49$; 4 – контуры исходных элементов при подборе; R – радиус описанного круга для шестиугольников, образующих конфигурации

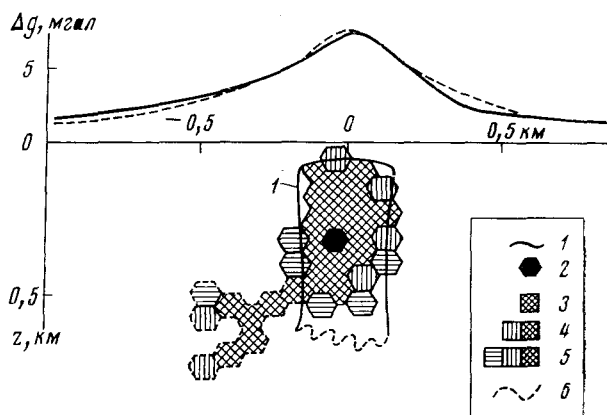


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи методом РНК на железорудном месторождении, $\Delta x=0,025$ км, $R=0,05$ км; 1 – наблюдаемая кривая Δg и контур сечения рудного тела по данным бурения, 2 – исходный элемент при подборе, найденный оптимизацией; сечения найденных конфигураций с плотностями $\delta=1,41$ (3); 1,08 (4); 0,86 (5); 6 – подобранная кривая Δg , $\delta=1,08$

модельных и практических материалах. Алгоритм решает двухмерную обратную задачу гравиметрии, поэтому вместо объемов V_0 и $\{v_\alpha\}$ мы оперируем с областями S_0 и $\{s_\alpha\}$, и т. д. Пусть в точках $x_j, j=1(1)N$, на оси Ox наблюдается поле $\Delta g(x)$, описываемое структурной моделью $\Delta g^n(x) = \Delta g^n(x) + \Delta g^\phi(x) + \delta \Delta g(x)$, где $\Delta g^n(x)$ — региональное поле, $\Delta g^\phi(x) \approx A + Bx$, $\delta \Delta g(x)$ — поле случайных помех, в точках наблюдения представляемое значениями некоррелированных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и одной и той же дисперсией σ . Предполагается, что функция $\Delta g^n(x)$ порождается массами постоянной плотности, распределенными по конечной области S . Обратная задача состоит в определении S и плотности δ . Будем искать решение обратной задачи методом подбора, положив $\Delta g^{\text{под}}(x) = A + Bx + \delta \Delta g_K^{(1)}(x)$; здесь K — конфигурация со свойством связности из замощения Z_0 заданного прямоугольника $a \leq x \leq b, c \leq z \leq d$ (нижней полуплоскости) шестиугольниками с линиями центров, параллельными координатным осям. В качестве конфигурационного закона принят $\delta = \text{const}$, т. е. во всех точках $(x, z) \in K$ плотность должна быть постоянной. Через $\Delta g_K^{(1)}(x)$ обозначено поле Δg от масс единичной плотности в K . Итак, искомыми являются A, B, δ и конфигурация K . В качестве меры близости между наблюдаемыми и подбираемыми значениями примем среднеквадратическое расхождение в точках наблюдения. Алгоритм регулируемой направленной кристаллизации (РНК) для решения поставленной обратной задачи функционирует следующим образом. Пусть τ_0 — шестиугольник из Z_0 , который либо считается заданным, либо определяется из условия $[(\xi_\alpha - x_0)^2 + (\eta_\alpha - z_0)^2] = \min_{\alpha \in A}$, где $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ — координаты центра τ_0 , а (x_0, z_0) найдены из решения задачи наилучшего среднеквадратического приближения $\Delta g^n(x_j)$ функцией $A + Bx + \Delta g_0(x; x_0, z_0)$, где $\Delta g_0(x; x_0, z_0)$ — поле точечного источника в (x_0, z_0) . К элементу τ_0 последовательно присоединяются элементы из Z_0 (по одному): образуются конфигурации $\tau_1, \tau_2, \dots$ с убывающими плотностями. Процесс останавливается по критерию $|\delta_{\tau_k} - \delta_{\text{зад}}| = \min$, где $\delta_{\text{зад}}$ — заданная плотность (возможно получение ряда вариантов с различными $\delta_{\text{зад}}$).

Переход от конфигурации τ_k к конфигурации τ_{k+1} осуществляется так. Пусть O_k — оболочка конфигурации τ_k (множество шестиугольников из Z_0 , не принадлежащих τ_k и прилегающих к шестиугольникам из τ_k по целым сторонам); обозначим через τ_{k+1}^* пробную конфигурацию, получающуюся присоединением к τ_k одного элемента из Q_k , и найдем величину

$$\Phi(\tau_{k+1}^*) = \min_{A, B, \delta_{k+1}^*} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta g^n(x_j) - (A + Bx_j) - \delta_{k+1}^* \Delta g_{\tau_{k+1}^*}^{(1)}(x_j))^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $\Delta g_{\tau_{k+1}^*}^{(1)}(x)$ — поле Δg от масс единичной плотности в пробной конфигурации. Пробная конфигурация τ_{k+1}^* , для которой $\Phi(\tau_{k+1}^*)$ минимальна (минимум ищется по всевозможным пробным конфигурациям), и принимается за τ_{k+1} . Описанный алгоритм был реализован на ЭВМ БЭСМ-4. На рис. 1 приведен пример его использования на модели поля Δg от двухмерной прямоугольной призмы. На рис. 2 даны результаты решения обратной задачи методом РНК на одном из железорудных месторождений контактово-метасоматического типа. Приведенные примеры, по мнению авторов, убедительно свидетельствуют об эффективности алгоритма РНК.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 XI 1975