

Ф. ТЕРПЕ, Ю. ФЛАКСМАЙЕР

ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ ТЕОРИИ КОМПАКТИФИКАЦИЙ И ТЕОРИИ МЕРЫ В ВОПРОСАХ СУММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 VII 1975)

Уже имеются некоторые приложения теории компактификаций и теории меры к обобщению некоторых вопросов классического метода суммирования ^(1, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 13).

Мы покажем в этой заметке, что с помощью компактификации основного пространства и теории меры суммирование можно понимать как слабую сходимость некоторого семейства радоновских мер.

Будем рассматривать лишь вещественные функции и вещественные меры, а через X обозначать произвольное локально-компактное, но некомпактное хаусдорфово пространство.

Пусть A — семейство радоновских мер $\mu_x, x \in X$, определенных на X , фильтрующееся по фильтру всех кокомпактных множеств пространства X . Назовем семейство A суммируемым (или суммированием), если норма $\|\mu_x\|$ конечна для всех $x \in X$. Множество всех непрерывных функций f , определенных на X и несобственно интегрируемых по каждой мере μ_x из A , является подпространством векторного пространства $\mathcal{C}(X)$ всех непрерывных функций, определенных на X . Определим функцию Af равенством $Af(x) = \int_X f d\mu_x = \mu_x(f)$, $\mu_x \in A$. Назовем функцию f A -суммируемой, если функция Af непрерывна и имеет предел $A\text{-}\lim f := \lim_{x \rightarrow \infty} Af(x)$.

Это эквивалентно тому, что функцию Af можно непрерывно продолжать на александровскую компактификацию $\alpha X = X \cup \{\infty\}$, причем $Af(\infty) := A\text{-}\lim f$, где через Af мы снова обозначили продолжение функции Af на αX . Все A -суммируемые функции составляют предпространство векторного пространства $\mathcal{C}(X)$, которое обозначим через $W(A)$ и назовем областью действия семейства A .

Скажем, что семейство A сохраняет сходимость, если ограничение $f|_X$ всякой непрерывной функции $f \in \mathcal{C}(\alpha X)$ является A -суммируемым, что можно записать, пользуясь естественным изоморфизмом, так: $f \in \mathcal{C}(\alpha X) \Rightarrow Af \in \mathcal{C}(\alpha X)$. Скажем, что A порождает сходимость, если всякая ограничивающая непрерывная функция A -суммируема, т. е. если $\mathcal{C}_b(X) \subset W(A)$. Назовем семейство A перманентным, если оно сохраняет сходимость и притом $A\text{-}\lim f|_X = f(\infty)$ для всех $f \in \mathcal{C}(\alpha X)$.

Замечание. В классическом случае суммируемой бесконечной матрицы $A = (a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ ($\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$ для всех i) полагаем $X = \mathbb{N}$, а $\mu_i(j) = a_{ij}$.

Следуя Н. Бурбаки, в двойственном к $\mathcal{C}(\alpha X)$ пространстве $M(\alpha X)$ рассматриваем топологию $\sigma_\alpha := \sigma(M(\alpha X), \mathcal{C}(\alpha X))$, а в двойственном к $\mathcal{C}(X)$ пространстве $M(X)$ — аналогичную топологию σ_β . Полагаем $\mu(f) = \int_X f d\mu$ для каждой радоновской меры μ на X и каждой интегрируемой по μ функции f .

Теорема 1. Суммируемость A на пространстве X :

а) сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда A слабо сходится в топологии σ_α к некоторой радоновской мере μ_α на александровском расширении αX ;

б) порождает сходимость тогда и только тогда, когда A слабо сходится в топологии σ_β к некоторой радоновской мере μ_β на стоун-чеховском расширении βX ;

в) перманентно тогда и только тогда, когда A слабо сходится в топологии σ_α к дираковской мере δ_∞ нароста $\{\infty\} = \alpha X \setminus X$.

Теорема 2. Суммируемость A на пространстве X сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда выполнены одновременно следующие условия:

$$1) \sup_{x \in X} \|\mu_x\| < \infty, \text{ где } \mu_x \in A;$$

2) (μ_x) при $x \rightarrow \infty$ поточечно сходится на пространстве $\mathcal{C}_{00}(X)$ всех непрерывных функций с компактными носителями;

$$3) (\mu_x(1)) \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ сходится в } \mathbf{R}.$$

Лемма 1. Если $f \in \mathcal{C}(\alpha X)$, а μ — радоновская мера на αX , то $\mu(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int f d\mu + \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot [\mu(1) - \int 1 d\mu]$.

Прилагая теорему 2 к классическому случаю суммируемой матрицы $A = (a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$, получим

Следствие 1 (теорема Кожима — Шура). Семейство $(\mu_i(j) = a_{ij})$ сохраняет сходимость на $X = \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда выполнены три следующих условия: 1) $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$, 2) в $\mathbf{R}$ для каждого j существует предел $a_j := \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}$, 3) в $\mathbf{R}$ существует предел $a := \lim_{i \rightarrow \infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij})$;

имеют место следующие два необходимых условия: 4) $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$ и

5) $A\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j + \lim_{j \rightarrow \infty} x_j [a - \sum_{j=1}^{\infty} a_j]$ для всякой сходящейся последовательности (x_i) .

Соответственно получаем из теорем 1, в) и 2

Следствие 2 (теорема Топлица — Зильвермана). Семейство $(\mu_i(j) = a_{ij})$ перманентно на $X = \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда выполнены три следующих условия:

$$1) \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty, \quad 2) \text{ для всех } j \in \mathbb{N} \text{ предел } \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = 0, \quad 3) \lim_{i \rightarrow \infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}) = 1.$$

Лемма 2. Последовательность $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ гипердиффузных * радоновских мер μ_i , определенных на $\beta \mathbb{N}$, слабо сходится в топологии σ_β к некоторой радоновской мере μ_β на $\beta \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $\|\mu_\beta - \mu_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$;

при этом μ_β гипердиффузна на $\beta \mathbb{N}$ и, значит, $\|\mu_\beta\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_\beta(j)|$.

Отсюда и из теоремы 1 а), б) получаем

Следствие 3 (теорема Шура). Для бесконечной матрицы $(a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ семейство $(\mu_i(j) = a_{ij})$ порождает сходимость тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: 1) (μ_i) сохраняет сходимость,

$$2) \lim_{i \rightarrow \infty} (\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} - a_j|) = 0, \text{ где } a_j := \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}.$$

Следствие 4 (теорема Штейнгауза). Для всякой бесконечной матрицы $(a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ семейство $(\mu_i(j) = a_{ij})$, порождающее сходимость, не перманентно.

* Положительную радоновскую меру μ на компакте X называют гипердиффузной, если $\mu(B) = 0$ для всякого нигде не плотного борелевского множества B . Произвольную радоновскую меру μ называют гипердиффузной, если положительные меры μ^+ и μ^- гипердиффузны.

Пусть для бесконечных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ последовательности $(\mu_i(j)=a_{ij})$ и $(\nu_i(j)=b_{ij})$ перманентны. Их называют абсолютно эквивалентными на m ($\cong \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$), если для любой последовательности $x \in m$ последовательность $(A-B)x$ сходится к нулю.

Следствие 5 (теорема Кука). A и B абсолютно эквивалентны на m тогда и только тогда, когда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} - b_{ij}| \right) = 0.$$

Сформулируем еще одно известное утверждение Робинсона на языке мер.

Следствие 6 (теорема Робинсона). Пусть для бесконечной матрицы (a_{ij}) семейство $(\mu_i(j)=a_{ij})$ перманентно.

Тогда $\|\mu_i\| \rightarrow 1$ в том и только том случае, когда выполнено условие для всякой последовательности $x=(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} x_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mu_i(x) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \mu_i(x) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} x_i. \quad (*)$$

Согласно Мазуру и Орличу ⁽⁹⁾, перманентный мультипликативный матричный метод суммирования эквивалентен субметоду для единичной матрицы I . Субметод для I применительно к ограниченным последовательностям всегда мультипликативен. Г. Брауер утверждал ⁽³⁾, что справедливо и обратное утверждение, т. е. что если матричный метод для ограниченных последовательностей из $W(A)$ мультипликативен, то он эквивалентен субметоду для I ограниченных последовательностей. М. Хенриксен показал ⁽⁷⁾, что это неверно. Он использовал одну теорему Брудно ⁽⁵⁾ о пересечении убывающей последовательности ограниченных полей действия перманентных матричных методов суммирования, а также свои результаты о субметодах и стоун-чевском расширении $\beta\mathbb{N}$. Р. Аталла ⁽¹⁾ также опроверг утверждение Г. Брауера. Мы дадим еще одно более краткое обоснование для подобного контрпримера.

Пусть A — перманентный матричный метод суммирования. Его ограниченное поле действия $W_0(A)$ мы считаем банаховой подалгеброй $\mathcal{A}$ алгебры m ($\cong \mathcal{C}_b(\mathbb{N})$). Подалгебра $\mathcal{A}$ порождает некоторую компактификацию $s\mathbb{N}$.

Лемма 3. В этих условиях A мультипликативно на $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда семейство мер $\mu_i(j)=a_{ij}$ слабо сходится в топологии σ_c к дираковской мере δ_x с носителем x , где $x \in s\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Доказательство. Последовательность μ_i слабо сходится к некоторой радоновской мере μ_c на $s\mathbb{N}$. Из мультипликативности следует, что μ_c является дираковской мерой δ_x . Так как A перманентно, то $x \in s\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Лемма 4. Существует такая последовательность мер μ_i , $i \in \mathbb{N}$, на $\mathbb{N}$, что: 1) $\mu_i(f) \rightarrow 0$ для ограничений f всех функций из $\mathcal{C}(\alpha X)$; 2) $\mu_i(g) \rightarrow 0$ для всех остальных ограниченных непрерывных функций g .

Лемма 5. Существует такая «двухточечная» компактификация $b\mathbb{N}$, что порождающая ее подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры m ($\cong \mathcal{C}_b(\mathbb{N})$) является ограниченным полем действия $W_b(B)$ некоторого мультипликативного матричного метода суммирования B .

Доказательство. Пусть $N_0 = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, а $N_1 = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\mathbb{N} = N_0 \cup N_1$. Пусть $b\mathbb{N} = \alpha N_0 \cup \alpha N_1$ — топологическая сумма компактификаций αN_j . Пусть μ_i — меры на N_1 , удовлетворяющие условиям леммы 4, δ_i — дираковские меры на N_0 , а $\nu_i = \delta_{2i} + \mu_{2i-1}$. По построению меры ν_i слабо сходятся к дираковской мере δ_∞ на $\alpha N_0 \setminus N_0$. Ограниченное поле действия $W_b(B)$, где $B=(\nu_i)$, совпадает с $\mathcal{B}$. Согласно лемме 3 B мультипликативно.

З а м е ч а н и е. Матричный метод суммирования B может быть не эквивалентен субметоду для I . Некоторые субметоды S для I имеют в качестве ограниченного поля действия лишь такие подалгебры $\mathcal{A}$ алгебры m , что определенные ими компактификации получаются из $\beta\mathfrak{N}$ склеиванием некоторого открыто-замкнутого подмножества нароста $\beta\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{N}$ в точку ⁽⁷⁾. Но таким образом мы никогда не получим ни одной «двухточечной» компактификации в $\mathfrak{N}$.

Секция математики
Университета им. Э. Арндта
Грайфсвальд, ГДР

Поступило
7 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ *R. E. Atalla*, Proc. Am. Math. Soc., v. 26, 437 (1970). ² *R. E. Atalla*, ibid., v. 35, 416 (1972). ³ *G. Brauer*, Am. Math. Monthly, v. 63, 123 (1956). ⁴ *G. Brauer*, Bull. Am. Math. Soc., v. 74, 609 (1968). ⁵ *А. Брудно*, Мат. сб., т. 16 (58), 191 (1945). ⁶ *R. G. Cooke*, Infinite Matrices and Sequence Spaces, London, 1950. ⁷ *M. Henviksen*, Math. Zs., v. 71, 427 (1959). ⁸ *M. Henriksen, J. R. Isbell*, Bull. Am. Math. Soc., v. 70, 287 (1964). ⁹ *S. Marur, W. Orlicz*, Studia Math., v. 14, 129 (1954). ¹⁰ *A. R. Raimi*, Duke Math. J., B. 33, 1 (1966). ¹¹ *W. Rudin*, ibid., v. 23, 409 (1956). ¹² *Z. Semadeni*, Coll. Math., v. 12, 229 (1964). ¹³ *A. K. Snyder*, Duke Math. J., v. 36, 245 (1969). ¹⁴ *K. Zeller, W. Beekmann*, Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin, 1970.