

Л. М. НЕВОСТРУЕВ, С. П. ПУЛЬКИН

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Векун 3 XII 1975)

1°. Уравнение

$$xz_{xx} + \operatorname{sgn} y z_{yy} + a(x, y) z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z = 0 \quad (1)$$

будем изучать в области $\mathcal{D}$, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ отрезком OB оси OY , $O(0, 0)$, $B(0, 1)$, и нормальной кривой $\Gamma: 4x + y^2 = 1$, соединяющей точки $A(1/4, 0)$ и B ; в полуплоскости $y < 0$ — характеристиками OC и AC . Совокупность точек области $\mathcal{D}$, для которых $y > 0$ ($y < 0$), обозначим $\mathcal{D}_1$ ($\mathcal{D}_2$). Функция $a(x, y)$ в области $\mathcal{D}_1$ допускает представление $a(x, y) = -\alpha + x^\beta a_1(x, y)$, $\alpha \geq 1$, в области $\mathcal{D}_2$: $a(x, y) = -\gamma/2 + x^\beta a_1(x, y) + (-y)^\gamma a_2(x, y)$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$; $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{D}$.

Сингулярная задача Р. В области $\mathcal{D}$ найти решение $z(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{\mathcal{D}} \cup OCUAC$, ограниченное в $\mathcal{D}$, имеющее непрерывные частные производные первого порядка в $\mathcal{D}$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$1) \left[\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial x}{ds} - x \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{1-2\alpha}{4} z \frac{dy}{ds} \right]_\Gamma = \varphi(s),$$

$$2) \left[\frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dy}{dx} \right]_{oc} = g(x).$$

2°. В области $\mathcal{D}_2$ уравнение (1) преобразуем к характеристическим координатам $\xi = 2\sqrt{x+y}$, $\eta = 2\sqrt{x-y}$. Получим уравнение

$$z_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi+\eta} (z_\xi + z_\eta) + A_0 z_\xi + B_0 z_\eta + C_0 z = 0, \quad (2)$$

$$A_0(\xi, \eta) = \frac{a_1(x, y)}{4^{2\beta}(\xi+\eta)^{1-2\beta}} + \frac{(\eta-\xi)^\gamma a_2(x, y)}{2^\gamma(\xi+\eta)} + 1/4 b(x, y),$$

$$B_0(\xi, \eta) = \frac{a_1(x, y)}{4^{2\beta}(\xi+\eta)^{1-2\beta}} + \frac{(\eta-\xi)^\gamma a_2(x, y)}{2^\gamma(\xi+\eta)} - 1/4 b(x, y),$$

$$C_0(\xi, \eta) = 1/4 c(x, y).$$

Область $\mathcal{D}_2$ преобразуется в область H , ограниченную линиями $\xi=0$, $\xi=\eta$, $\eta=1$. Для уравнения (2) мы построим функцию Римана — Адамара. Положим

$$v(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \begin{cases} v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) & \forall(\xi, \eta), 0 < \xi \leq \xi_0, \xi_0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ v_2(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) & \forall(\xi, \eta), 0 < \xi \leq \xi_0, \xi \leq \eta \leq \xi_0. \end{cases}$$

Функция $v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$ есть функция Римана для уравнения (2), ее можно построить методом последовательных приближений ⁽¹⁾. Функция $v_2(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$ есть функция, обладающая свойствами, описанными в ⁽²⁾, она может быть представлена в виде

$$v_2(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta),$$

где

$$G_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = - \int_{\xi}^{\eta} \frac{\xi + \eta}{\xi' + \xi_0} h(\xi_0, \eta_0, \xi') d\xi',$$

$$G_{n+1}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \int_{\eta}^{\xi_0} \frac{\xi + \eta}{\xi' + \eta'} D[G_n(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta', \quad n=1, 2, \dots,$$

$$h(\xi_0, \eta_0; \xi) = \tau(\xi_0, \eta_0; \xi) + B_0(\xi, \xi_0) \tau_1(\xi_0, \eta_0; \xi),$$

$$D(Z) = (A_0 Z)_{\xi} + (B_0 Z)_{\eta} - C_0 Z,$$

$$\tau(\xi_0, \eta_0; \xi) = \frac{\partial v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi_0)}{\partial \xi} - \left[\frac{1}{\xi + \xi_0} + B_0(\xi, \xi_0) \right] v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi_0),$$

$$\tau_1(\xi_0, \eta_0; \xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \tau(\xi_0, \eta_0; s) \frac{\xi + \xi_0}{s + \xi_0} \exp \left[\int_s^{\xi} B_0(t, \xi_0) dt \right] ds.$$

Используя функцию $v(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, получаем решение первой задачи Коши — Гурса

$$\begin{aligned} z(\xi_0, \eta_0) &= \frac{2\xi_0}{\xi_0 + \eta_0} \tau_1(\xi_0) \exp \left[- \int_{\xi_0}^{\eta_0} A_0(\xi_0, t) dt \right] + \frac{\eta_0}{\xi_0 + \eta_0} \psi_1(\eta_0) \times \\ &\times \exp \left[- \int_0^{\xi_0} B_0(t, \eta_0) dt \right] - \psi_1(\xi_0) \frac{\xi_0}{\xi_0 + \eta_0} \exp \left[- \int_{\xi_0}^{\eta_0} A_0(\xi_0, t) dt - \right. \\ &- \left. \int_0^{\xi_0} B_0(t, \xi_0) dt \right] - \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \tau_1(\xi) R(\xi_0, \eta_0; \xi) d\xi - \int_0^{\eta_0} \left[\frac{\partial v(\xi_0, \eta_0; 0, \eta)}{\partial \eta} - \right. \\ &- \left. \left(\frac{1}{\eta} + A_0(0, \eta) \right) v(\xi_0, \eta_0; 0, \eta) \right] \psi_1(\eta) d\eta; \end{aligned} \quad (3)$$

$$R(\xi_0, \eta_0; \xi) = \left[\frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\xi}, \quad \tau_1(\xi) = \tau(x) = z(x, 0), \quad \psi_1(\eta) = \psi(x) = z|_{oc},$$

Пользуясь функцией $v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, которая естественно распространяется на область, ограниченную линиями $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\eta = \xi$, получаем решение задачи Коши, из которого устанавливаем, что $\tau_1(t)$, $\psi_1(t)$, $v_1(t)$ связаны следующим соотношением:

$$\tau_1(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} K(\eta_0, t) \tau_1(t) dt = f(\eta_0), \quad (4)$$

где

$$v_1(\xi) = v \left(\frac{\xi^2}{4} \right) = z_{\xi} - z_{\eta} |_{\xi=\eta} = z_y |_{y=0}, \quad H_1(\xi_0, \eta_0; t) = v_1(\xi_0, \eta_0; t, t),$$

$$f(\eta_0) = \exp \left[- \int_0^{\eta_0} B_0(t, \eta_0) dt \right] \left[\psi_1(\eta_0) + \frac{1}{2} \int_0^{\eta_0} H_1(0, \eta_0; t) v_1(t) dt \right],$$

$$K(\eta_0, t) = \frac{1}{2} R_1(0; \eta_0, t) \exp \left[- \int_0^{\eta_0} B_0(\lambda, \eta_0) d\lambda \right],$$

$$R_1(\xi_0, \eta_0; t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) + (A_0 - B_0) v_1 |_{\eta=\xi=t}.$$

Разрешая уравнение (4) относительно $\tau_1(t)$ и подставляя найденное значение в формулу (3), мы получаем решение второй задачи Коши — Гурса.

3°. Задача nL. Найти в области $\mathcal{D}_2$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

- 1) $z(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1/4;$
- 2) $z_y - xz_x dy/dx|_{oc} = g(x), \quad 0 < x \leq 1/16.$

Задача nG. Найти в области $\mathcal{D}_2$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

- 1) $\partial z / \partial y|_{y=0} = v(x), \quad 0 < x < 1/4;$
- 2) $z_y - xz_x dy/dx|_{oc} = g(x), \quad 0 < x \leq 1/16.$

Решение задачи nL проведем следующим образом. Функцию $\psi_1(\eta_0)$, входящую в формулу (3), считаем неизвестной. Определим ее таким образом, чтобы $z(\xi_0, \eta_0)$, определяемая формулой (3), удовлетворяла краевым условиям задачи nL. Пусть $1 + \eta_0 B_0(0, \eta_0) \neq 0$. Тогда приходим к уравнению

$$\psi_1(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} K_1(\eta_0, \eta) \psi_1(\eta) d\eta = f_1(\eta_0), \quad (5)$$

$$K_1(\eta_0, \eta) = \frac{\eta_0}{1 + \eta_0 B_0(0, \eta_0)} \frac{\partial Q^*(0, \eta_0; \eta)}{\partial \xi_0},$$

$$Q^*(\xi_0, \eta_0; \eta) = \frac{\partial v_1(\xi_0, \eta_0; 0, \eta)}{\partial \eta} - \left[A_0(0, \eta) + \frac{1}{\eta} \right] v_1(\xi_0, \eta_0; 0, \eta),$$

$$f_1(\eta_0) = \frac{\eta_0}{1 + \eta_0 B_0(0, \eta_0)} \left[A \int_0^{\eta_0} C_0(0, \eta) d\eta - g_1(\eta_0) \right], \quad z(0, 0) = A.$$

Определив из уравнения (5) функцию $\psi_1(\eta)$ и подставив ее в формулу (3), получаем решение задачи nL.

4°. Используя полученный результат (5), устанавливаем следующий принцип максимума для уравнения (2). Пусть коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют в области $\bar{H}$ неравенствам

$$\frac{\partial A_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{A_0(\xi, \eta) + B_0(\xi, \eta)}{\xi + \eta} + A_0(\xi, \eta) \cdot B_0(\xi, \eta) - C_0(\xi, \eta) \geq 0, \quad (1)$$

$$A_0(\xi, \eta) + \frac{1}{\xi + \eta} \geq 0, \quad C_0(\xi, \eta) \geq 0, \quad C_0(0, \eta) = 0.$$

Будем пользоваться обобщенным решением класса (S) (3).

Теорема 1. Если $z(\xi, \eta)$ есть обобщенное решение уравнения (2) класса S, непрерывное в $\bar{H}$, причем $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad 0 < \eta \leq 1$, то максимум

$z(\xi, \eta)$ в $\bar{H}$, если он положителен, достигается на линии $\eta = \xi$.

5°. Решение задачи nG получим, подставив функцию $\psi_1(\eta)$, определенную из уравнения (5), в формулу, определяющую решение второй задачи Коши — Гурса. Из полученной формулы находим

$$\tau(x) = 1/2 \int_0^{2\sqrt{x}} v_1(t) T(2\sqrt{x}, t) dt + F(2\sqrt{x}), \quad (6)$$

где $T(u, v)$ и $F(u)$ суть выражения, зависящие от построенных для нашего уравнения функций Римана и Римана — Адамара.

6°. Задача K₁E для области $\mathcal{D}_1$. Найти в $\mathcal{D}_1$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$1) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dx}{ds} - x \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{1-2\alpha}{4} z \frac{dy}{ds} \Big|_{\Gamma} = \varphi(s);$$

$$2) \partial z / \partial y|_{y=0} = v(x).$$

Пусть $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина уравнения

$$xz_{xx} + z_{yy} + \alpha z_x = 0, \quad (7)$$

построенная в работе ⁽⁴⁾.

Решение задачи К₁Е для уравнения (1) ищем в виде

$$z(x, y) = z_0(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}_1} G(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $z_0(x, y)$ — решение задачи К₁Е для уравнения (7), определенное в ⁽⁴⁾.

Для нахождения функции $\rho(x, y)$ составляем интегральное уравнение, разрешимость которого следует из единственности решения задачи К₁Е ⁽⁵⁾, а ядро $K_2(x, y; \xi, \eta)$ есть первая итерация ядра

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left[x^0 a_1(x, y) \frac{\partial G}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial G}{\partial y} + cG \right].$$

Подставив найденное значение $\rho(x, y)$, получим решение задачи К₁Е. Полагая в нем $y=0$, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \tau(x) = & - \int_0^{1/4} v(t) [G(x, t) + K_0(x, t) + \bar{K}_{00}(x, t)] dt - \\ & - \int_{\Gamma} \varphi(s) [\bar{G}(x, s) + \bar{K}_0(x, s) + \bar{K}_{00}(x, s)] ds, \end{aligned} \quad (8)$$

где $G(x, t) = G(x, 0; t, 0)$; $\bar{G}(x, s) = G(x(s), y(s); x, 0)$; K_0 , $\bar{K}_0$ выражаются через G , a , b , c , а K_{00} и $\bar{K}_{00}$, кроме того, еще через резольвенту ядра $K_2(x, y; \xi, \eta)$.

⁷о. Лемма. Если $z(x, y)$ есть решение задачи К₁Е, причем $v(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (\partial z / \partial y)$ непрерывна в $0 < x < 1/4$ и абсолютно интегрируема в $0 \leq x \leq 1/4$,

то $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\partial z / \partial l) = 0$ для каждого y , $0 < y < 1$, где $l = 2\sqrt{x}$.

Известными методами, учитывая полученную лемму и теорему 1, мы убеждаемся в единственности решения сингулярной задачи Р.

⁸о. Сопоставляя (6) и (8), получаем интегральное уравнение первого рода, которое после преобразований принимает вид

$$\bar{v}(u) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \bar{v}(t) \left[\frac{1}{t-u} + \frac{1}{1-ut} + \frac{c_1(t, u)}{t+u} \right] dt = \int_0^1 R_0(u, t) \bar{v}(t) dt + \lambda(u),$$

где $R_0(u, t)$ выражается через T , K_0 , K_{00} , а $\lambda(u)$ выражается через F , $\bar{G}$, $\bar{K}_0$, $\bar{K}_{00}$.

Проведя регуляризацию полученного уравнения по схеме, предложенной в работе ⁽⁶⁾, мы получим интегральное уравнение Фредгольма II рода, разрешимость которого следует из единственности решения сингулярной задачи Р. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Если:

- 1) $\varphi(s)$ непрерывна на $0 \leq s \leq S$, где S — длина дуги Γ ,
- 2) функция $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в $(0, 1)$,
- 3) коэффициенты уравнения (1) таковы, что при $y < 0$ выполняются условия (I), то решение сингулярной задачи Р для уравнения (1) в нормальной смешанной области $\mathcal{D}$ существует и единственно.

Оренбургский политехнический институт

Поступило

Куйбышевский педагогический институт

24 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 8, № 5, 195 (1944). ² В. Ф. Волковиков, Л. М. Невоструев, Волжск. математич. сб., в. 3 (1965). ³ С. П. Пулькин, ДАН, т. 118, № 1 (1958). ⁴ Л. М. Невоструев, Волжск. матем. сб., в. 6 (1968). ⁵ О. А. Олейник, ДАН, т. 87, № 6 (1952). ⁶ С. П. Пулькин, Тр. II научной конфер. математич. кафедр пединститутов Поволжья, 1962.