

А. Г. ЧЕНЦОВ

К ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ С ИНФОРМАЦИОННОЙ ПАМЯТЬЮ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 24 X 1975)

Работа примыкает к исследованиям ⁽¹⁻⁷⁾ и является продолжением ⁽⁸⁾ для систем с информационной памятью.

1. Будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad (1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subseteq \text{comp}(R^p), \quad v \in Q \subseteq \text{comp}(R^q),$$

удовлетворяющую всем условиям, сформулированным в ⁽⁸⁾. Пусть $t_0 < \vartheta_0$ — два заданных числа; $T = [t_0, \vartheta_0]$; $\mathcal{M}$ — замкнутое подмножество в $C_n(T)$ и $(N_t)_{t \in \prod T} S_t$, где $S_t = 2^{C_n([t_0, t])^n}$ для каждого $t \in T$. Здесь и ниже $C_n([t_0, t])$ — пространство непрерывных функций $[t_0, t] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\cdot\|_c^t$, определяемой условием $\|g\|_c^t = \max_{t_0, t} \|g(\xi)\|_n$, где $\|\cdot\|_n$ — евклидова норма в R^n .

Рассмотрим задачу конфликтного наведения траекторий системы (1) на множество $\mathcal{M}$ при ограничениях $(N_t)_t$. При этом будем предполагать, что в осуществлении наведения заинтересован I игрок, распоряжающийся управлением $u \in P$. Выбор управления $v \in Q$ находится в распоряжении II игрока, преследующего противоположную цель. Уточним постановку задачи; при этом будем предполагать, что при всех $t \in T$ множество N_t замкнуто в $C_n([t_0, t])$.

Пусть $t_* \in T$, $g \in C_n([t_0, t_*])$, $\eta \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$. Тогда для каждого $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ обозначим $\Phi^\vartheta(\cdot, t_*, g, \eta)$ функцию из $C_n([t_0, \vartheta])$, для которой при всех $t \in [t_0, t_*]$ $\Phi^\vartheta(t, t_*, g, \eta) = g(t)$, и для всех $t \in [t_*, \vartheta]$ $\Phi^\vartheta(t, t_*, g, \eta) = \varphi(t, t_*, g(t_*), \eta)$ ^(7, 8).

Тогда задачу наведения сформулируем в следующем виде. Найти максимальную систему $(K_t)_{t \in \prod T} S_t$, обладающую тем свойством, что для всякого $t_* \in T$ и любой функции $g \in K_{t_*}$ существует квазипрограмма α_0 I игрока ⁽⁸⁾ на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$, для которой при всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$, $\eta \in \alpha_0(v)$

$$\Phi(\cdot, t_*, g, \eta) \in \mathcal{M}; \quad (2)$$

$$\Phi^t(\cdot, t_*, g, \eta) \in N_t \quad (3)$$

при всех $t \in [t_*, \vartheta_0]$; здесь и ниже

$$\Phi(\cdot, t_*, g, \eta) = \Phi^\vartheta(\cdot, t_*, g, \eta).$$

В работе исследуется решение указанной задачи и его связь с решением аналогичной задачи при управлении по истории игры ^(1, 3).

2. Пусть для систем $(E_t^{(j)})_{t \in \prod T} S_t$, $j=1, 2$, запись $(E_t^{(1)})_T \subseteq (E_t^{(2)})_T$ по определению означает, что $E_t^{(1)} \subset E_t^{(2)}$ при всех $t \in T$. Обозначим $\mathcal{F}_N$ множество всех $(E_t)_{t \in \prod T} S_t$, для которых при всех $t \in T$ E_t замкнуто в $C_n([t_0, t])$

и справедливо включение $(E_t)_T \subseteq (N_t)_T$. Определим оператор $A_*: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_N$ программного поглощения. Именно для любой системы множеств $(E_t)_T \in \mathcal{F}_N$ система $(G_t)_T = A_*[(E_t)_T]$ по определению такова, что для каждого $t_* \in T$ множество G_{t_*} совпадает с множеством всех функций $g \in E_{t_*}$, для каждой из которых при любом выборе $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ найдется $\eta_v \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$, для которого $\Phi(\cdot, t_*, g, \eta_v) \in \mathcal{M}$ и $\Phi'(\cdot, t_*, g, \eta_v) \in E_t$ при всех $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Символом A_*^k при всех $k \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ будем обозначать соответствующие степени оператора A_* .

Определим также оператор $A_*^\infty: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_N$ позиционного поглощения соотношением: для всякой системы множеств $(F_t)_T \in \mathcal{F}_N$ система $(G_t)_T = A_*^\infty[(F_t)_T]$ определена при всех $t \in T$ условием

$$G_t = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} G_t^{(k)},$$

где $(G_t^{(k)})_T = A_*^k[(F_t)_T]$. Символом $\mathcal{L}^*$ обозначим множество всех решений уравнения $A_*[(E_t)_T] = (E_t)_T$. Будем обозначать также $(\mathcal{W}_t^{(k)})_T = A_*^k[(N_t)_T]$, $(\mathcal{W}_t)_T = A_*^\infty[(N_t)_T]$. Из определений следует, что $(\mathcal{W}_t^{(k+1)})_T \subseteq (\mathcal{W}_t^{(k)})_T$ при всех $k \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ и $\mathcal{W}_t = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{W}_t^{(k)}$ для всякого $t \in T$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Система множеств $(\mathcal{W}_t)_T$ является элементом $\mathcal{L}^*$: $A_*[(\mathcal{W}_t)_T] = (\mathcal{W}_t)_T$.

Лемма 2. Пусть $(L_t)_T \in \mathcal{L}^*$, $t_* \in T$, $g \in L_{t_*}$ и функция $\alpha_0: \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\} \rightarrow 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}}$ определяется условиями: для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ множество $\alpha_0(v)$ состоит из всех управлений $\eta_0 \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$ для каждого из которых $\Phi'(\cdot, t_*, g, \eta_0) \in L_t$ при всех $t \in [t_*, \vartheta_0]$.

Тогда α_0 является квазипрограммой I игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$, причем для всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$, $\eta \in \alpha_0(v)$ справедливы включения

$$\Phi(\cdot, t_*, g, \eta) \in \mathcal{M}; \quad (4)$$

$$\Phi'(\cdot, t_*, g, \eta) \in N_t \quad (5)$$

при всех $t \in [t_*, \vartheta_0]$.

Лемма 3. Для всякого $k \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ при каждом $t \in T$ из условия $g \in C_n([t_0, t]) \setminus \mathcal{W}_t^{(k)}$ следует, что для любой квазистратегии α_0 I игрока $(^8)$ на отрезке $[t, \vartheta_0]$ либо найдется программное управление $\eta_0 \in \bigcup_{\{\mathcal{E}_\lambda, [t, \vartheta_0]\}} \alpha_0(v)$, для которого $\Phi(\cdot, t, g, \eta_0) \notin \mathcal{M}$, либо найдется программное управление $\eta^0 \in \bigcup_{\{\mathcal{E}_\lambda, [t, \vartheta_0]\}} \alpha(v)$ и момент $\tau \in [t, \vartheta_0]$, для которых $\Phi'(\cdot, t, g, \eta^0) \notin N_\tau$.

Из лемм 2 и 3 вытекает

Теорема 1. Система $(\mathcal{W}_t)_T \in \mathcal{F}_N$ такова, что при всяком $t \in T$ множество $\mathcal{W}_t$ совпадает с множеством всех функций $g \in C_n([t_0, t])$, для каждой из которых существует такая квазистратегия α_0 I игрока $(^8)$ на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$, что для всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$, $\eta \in \alpha_0(v)$ справедливы включения (4), (5). При условии $t_* \in T$, $g \in \mathcal{W}_{t_*}$, реализация включений (4), (5) достигается в классе квазипрограмм.

С учетом леммы 2 и теоремы 1 можно показать, что справедлива

Теорема 2. Система множеств $(\mathcal{W}_t)_T$ является наибольшим элементом частично упорядоченного множества $(\mathcal{L}^*, \subseteq)$: $(\mathcal{W}_t)_T \in \mathcal{L}^*$ и $(L_t)_T \subseteq (\mathcal{W}_t)_T$ при всех $(L_t)_T \in \mathcal{L}^*$.

3. Рассмотрим связь решения задачи наведения в классе квазипрограмм с решением в классе процедур управления по истории игры $(^1, ^2)$. Пусть $F_{\lambda, \tau}$ — множество всех борелевских функций $Q \rightarrow P$ и для каждого $t \in T$ $\mathcal{U}_{\lambda, t}$ — множество всех функций $U_{v, t}: C_n([t_0, t]) \rightarrow 2^{P^Q}$ с непустыми значениями $U_{v, t}(g)$. Обозначим $\mathcal{U}_v = \prod_t \mathcal{U}_{v, t}$, элементы $(U_{v, t})_T \in \mathcal{U}_v$ будем

называть контрстратегиями I игрока. Стратегиями I игрока будем называть элементы $(U_t)_T$ прямого произведения $\mathcal{U} = \prod_T \mathcal{U}_t$, где при всех $t \in T$ $\mathcal{U}_t$ множество всех функций $U_t: C_n([t_0, t]) \rightarrow 2^P$. Пусть $\Delta = \{[\tau_k, \tau_{k+1}), k = 0, \dots, m-1\}$, где $m \in \mathcal{N}$, $\tau_0 = t_* \in T$, $\tau_m = \vartheta_0$ и $\tau_k \leq \tau_{k+1}$ при всех $k = 0, \dots, m-1$. Обозначим $\mathcal{X}_\Delta(\cdot, t_*, g, U_v)$, где $g \in C_n([t_0, t_*])$ и $U_v = (U_{v,i})_T \in \mathcal{U}_v$, множество всех функций $x_\Delta[\cdot]: [t_0, \vartheta_0] \rightarrow R^n$, для которых $x_\Delta[t] = g(t)$ при всех $t \in [t_0, t_*]$,

$$\frac{dx_\Delta[t]}{dt} = f(t, x_\Delta[t], u_\Delta[t], v^{(\Delta)}[t]), \quad \text{mod}(\lambda | [t_*, \vartheta_0]), \quad (6)$$

где λ — мера Лебега, $v^{(\Delta)}[\cdot]: [t_*, \vartheta_0] \rightarrow Q$ измерима по Лебегу и для каждого $k \in \{0, \dots, m-1\}$ на $[\tau_k, \tau_{k+1})$ $u_\Delta[t] = s_k(v^{(\Delta)}[t])$, $s_k \in U_{v, \tau_k}(x_\Delta^{\tau_k}[\cdot])$, $x_\Delta^{\tau_k}[\cdot] \in C_n([t_0, \tau_k])$; $x_\Delta^{\tau_k}[t] = x_\Delta[t]$ при всех $t \in [t_0, \tau_k]$. Множество $\mathcal{X}(\cdot, t_*, g, U_v)$ по определению совпадает с множеством всех функций $x[\cdot] \in C_n(T)$, для каждой из которых существуют последовательности $(x^{(i)}[\cdot])_{i \in \mathcal{N}}$, $(\Delta^{(i)})_{i \in \mathcal{N}}$ функций из $C_n(T)$ и разбиений $[t_*, \vartheta_0)$ соответственно, для которых $\|x^{(i)}[\cdot] - x[\cdot]\|_{C^0} \rightarrow 0$, шаг разбиения $\Delta^{(i)}$ стремится к нулю ⁽¹⁾ и при всех $i \in \mathcal{N}$ $x^{(i)}[\cdot] \in \mathcal{X}_{\Delta^{(i)}}(\cdot, t_*, g, U_v)$. Аналогично определяются множества $\mathcal{X}_\Delta(\cdot, t_*, g, U)$ и $\mathcal{X}(\cdot, t_*, g, U)$, отвечающие стратегии $U \in \mathcal{U}$.

С учетом леммы 1 можно проверить, что справедлива

Лемма 4. Для любых $t_* \in T$, $g \in \mathcal{W}_{t_*}$, момента $\vartheta \in (t_*, \vartheta_0]$ и программно-управления $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ II игрока существует $\eta^0 \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$, для которого при всех $t \in [t_*, \vartheta]$

$$\Phi^t(\cdot, t_*, g, \eta^0) \in \mathcal{W}^t.$$

Из этой леммы следует, что система $(\mathcal{W}^t)_T$ множеств u -стабильна ⁽¹⁾. Поэтому при условии $t_* \in T$, $g \in \mathcal{W}_{t_*}$ задача наведения на $\mathcal{M}$ разрешается ^(1, 2), например, с помощью экстремальной контрстратегии. При дополнительном предположении ⁽¹⁾, стр. 56, о том, что выполняется условие (6) работы ⁽⁸⁾, решение задачи находится уже в классе стратегий. С другой стороны, для каждого $t_* \in T$ и всякой функции $g \in C_n([t_0, t_*])$, для любой контрстратегии $U_v = (U_{v,i})_T \in \mathcal{U}_v$ функция $\Pi(\cdot | U_v, t_*, g)$, значениями которой при каждом $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ являются множества всех $\eta \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$, для которых $\Phi(\cdot, t_*, g, \eta) \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, g, U_v)$, содержится в множестве квазистратегий I игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Поэтому с учетом теоремы 1 получаем, что справедлива

Теорема 3. Система множеств $(\mathcal{W}^t)_T \in \mathcal{F}_N$ такова, что при каждом $t_* \in T$ множество $\mathcal{W}_{t_*}$ совпадает с множеством всех функций $g \in C_n([t_0, t_*])$, для каждой из которых существует такая контрстратегия $U_v^0 \in \mathcal{U}_v$, что

$$\mathcal{X}(\cdot, t_*, g, U_v^0) \subset \mathcal{M}.$$

Отметим, что при дополнительном предположении (6) работы ⁽⁸⁾ утверждение теоремы 3 справедливо в классе $\mathcal{U}$ стратегий $U = (U_t)_T$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
4 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, М., 1974. ² А. И. Субботин, ДАН, т. 206, № 3 (1972). ³ Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 174, № 5 (1967). ⁴ Б. Н. Пшеничный, ДАН, т. 184, № 2 (1969). ⁵ E. Roxin, J. Optimiz. Theory and Appl., v. 3, № 3 (1969). ⁶ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, т. 34, № 6 (1970). ⁷ А. Г. Ченцов, ДАН, т. 215, № 4 (1974). ⁸ А. Г. Ченцов, ДАН, т. 226, № 1 (1976).