

С. Г. ОВСЕПЯН

О СТРУКТУРАХ НА МНОЖЕСТВЕ H -ЗАМКНУТЫХ РАСШИРЕНИЙ ХАУСДОРФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 XII 1975)

В работе ⁽¹⁾ доказывается, что множество $\mathcal{H}(X)$ всех хаусдорфово-бикompактных расширений произвольного тихоновского пространства X с некоторым естественным отношением порядка образует полурешетку сверху, а в случае локально-бикompактного тихоновского пространства X — полную решетку.

В работе ⁽²⁾ для любых двух локально-бикompактных тихоновских пространств X и Y устанавливается связь между гомеоморфизмами пространства $\beta X \setminus X$ на $\beta Y \setminus Y$ и изоморфизмами решетки $\mathcal{H}^s(X)$ на $\mathcal{H}^s(Y)$, где βX — стоун-чеховское расширение пространства X . В частности, как следствие получается, что решетки $\mathcal{H}^s(X)$ и $\mathcal{H}^s(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда наросты $\beta X \setminus X$ и $\beta Y \setminus Y$ гомеоморфны.

Опираясь на описанные в заметке ⁽³⁾ подходы, позволившие построить множество всевозможных H -замкнутых расширений произвольного хаусдорфова пространства, нам удастся задавать на этом множестве естественную структуру и установить, как и в ⁽²⁾, тесную связь между наростами фоминовских расширений пространств, соответствующие структуры которых изоморфны.

Заметим, что метод построения множества $\mathcal{H}(X)$ и исследования его структуры, данный в ⁽¹⁾, полностью основан на том, что семейство непрерывных действительных функций на вполне регулярном пространстве достаточно «богато», и, очевидно, не применим ни для построения H -замкнутых расширений, ни для исследования структур на множестве H -замкнутых расширений произвольного хаусдорфова пространства.

В настоящей заметке на множестве $\hat{\mathcal{H}}(X)$ всех классов θ -эквивалентных между собой H -замкнутых расширений хаусдорфова пространства X вводится структура полурешетки, которая оказывается полной решеткой тогда и только тогда, когда X локально H -замкнуто.

Далее для любых двух локально H -замкнутых пространств X и Y , при условии, что нарост $\delta X \setminus X$ фоминовского расширения δX пространства X не состоит из двух точек, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех изоморфизмов решетки $\hat{\mathcal{H}}(X)$ на $\hat{\mathcal{H}}(Y)$ и множеством всех гомеоморфизмов пространства $\delta X \setminus X$ на $\delta Y \setminus Y$. Такое же соответствие для любых хаусдорфовых и не локально H -замкнутых пространств X и Y устанавливается между множеством всех изоморфизмов полурешетки $\hat{\mathcal{H}}(X)$ на $\hat{\mathcal{H}}(Y)$ и множеством всех взаимно бикompактных биекций пространства $\delta X \setminus X$ на $\delta Y \setminus Y$. В частности, как следствие получается, что решетки $\hat{\mathcal{H}}(X)$ и $\hat{\mathcal{H}}(Y)$ локально H -замкнутых пространств X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда наросты фоминовских расширений пространств X и Y гомеоморфны, и что группа всех гомеоморфизмов пространства $\delta X \setminus X$ на себя для любого локально H -замкнутого пространства X изоморфна группе всех автоморфизмов решетки $\hat{\mathcal{H}}(X)$, если только $\delta X \setminus X$ не состоит из двух точек.

Как известно ⁽⁴⁾, каждое хаусдорфово бикompактное расширение тихоновского пространства X , с точностью до эквивалентности расширений,

является фактор-пространством стоун-чеховского расширения пространства X . Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для H -замкнутых расширений произвольного хаусдорфова пространства (см. следствие теоремы 4).

Пусть X — произвольное хаусдорфово пространство с топологией V и $X_0 = \{V_x; x \in X\}$, где V_x — система всех открытых окрестностей точки x . В заметке ⁽³⁾ пространству X сопоставляется множество хаусдорфовых псевдотопологических пространств $\{X_0 \cup \Psi, V\}$, где Ψ пробегает всевозможные хаусдорфовы системы открытых фильтров пространства X , не имеющих точек прикосновения, и рассматриваются два отображения F и F^* этого множества в множество топологических пространств, определенные следующим образом:

$$F\{X_0 \cup \Psi, V\} = (X_0 \cup \Psi, W),$$

$$F^*\{X_0 \cup \Psi, V\} = (X_0 \cup \Psi, W^*),$$

где W — топология на множестве $X_0 \cup \Psi$ с базой, образованной подмножествами вида $W_v = \{\psi \in X_0 \cup \Psi; v \in \psi\}$, когда v пробегает все V , а W^* — топология на том же множестве, базой которой служит множество $\{W_v^*; \psi \in X_0 \cup \Psi, v \in \psi\}$, где $W_v^* = \{\psi\} \cup \{V_x; v \in V_x\}$.

Пусть U — множество всех открытых ультрафильтров пространства X , не имеющих точек прикосновения и D_U — множество всех разбиений множества U на бикомпактные подмножества. Каждому разбиению $D \in D_U$ сопоставим H -замкнутое расширение $X_D = [(X_0 \cup \Psi_D, W^*); i]$, где $(X_0 \cup \Psi_D, W^*) = F^*\{X_0 \cup \Psi_D, V\}$, $\Psi_D = \{\psi_d; d \in D\}$, $\psi_d = \bigcap \{u; u \in d\}$, а i — гомеоморфизм пространства X в пространство $(X_0 \cup \Psi_D, W^*)$, порожденный соответствием $x \mapsto V_x$ (см. ⁽³⁾).

В дальнейшем, отождествляя X с его гомеоморфным образом X_0 при отображении i , мы будем в рассматриваемых расширениях опускать гомеоморфизм i и под расширением вместо пары понимать только соответствующее топологическое пространство.

Пусть $\mathcal{E}(X)$ — множество всех X_D , когда D пробегает всевозможные разбиения множества U на бикомпактные подмножества. Множество $\mathcal{E}(X)$ частично упорядочим обычным отношением, полагая $X_1 > X_2$ лишь в том случае, когда существует непрерывное отображение пространства X_1 на X_2 , тождественное на X .

Пусть, далее, $\hat{\mathcal{E}}(X) = \{X_D; D \in D_U\}$, где X_D — тот класс θ -эквивалентных между собой H -замкнутых расширений пространства X , который порожден разбиением D (см. ⁽³⁾). Для любого $D \in D_U$ X_D с указанным выше отношением образует псевдотопологию ⁽⁵⁾ с наибольшим элементом X_D и с наименьшим элементом $\tilde{X}_D = F\{X_0 \cup \tilde{\Psi}_D, V\}$, где $\tilde{\Psi}_D$ — система полурегулярных открытых фильтров, ассоциированная с Ψ_D , т. е. $\tilde{\Psi}_D = \{\psi_*; \psi \in \Psi_D\}$, где ψ_* — открытый фильтр с базой, состоящей из всех канонически открытых множеств, принадлежащих ψ .

В множестве $\hat{\mathcal{E}}(X)$ введем отношение частичного упорядочения следующим образом: $\hat{X}_1, \hat{X}_2 \in \hat{\mathcal{E}}(X)$, $\hat{X}_1 > \hat{X}_2$ тогда и только тогда, когда для некоторого $X_1 \in \hat{X}_1$ и некоторого $X_2 \in \hat{X}_2$ (следовательно, $\forall X_1 \in \hat{X}_1$ и $\forall X_2 \in \hat{X}_2$) существует θ -непрерывное отображение пространства X_1 на X_2 , оставляющее неподвижными точки множества X .

Заметим, что, как показано в ⁽²⁾, объединение всех классов, принадлежащих $\mathcal{E}(X)$, дает всю совокупность H -замкнутых расширений пространства X , а $\mathcal{E}(X)$ только с точностью до θ -эквивалентности расширений представляет эту совокупность.

Предложение 1. Пусть X — хаусдорфово пространство и $\hat{X}_1, \hat{X}_2 \in \hat{\mathcal{E}}(X)$; тогда для любого $X_1 \in \hat{X}_1$ и любого $X_2 \in \hat{X}_2$ существует не более чем одно θ -непрерывное отображение пространства X_1 на X_2 , тождественное на X .

Предложение 2. Пусть X_1 и X_2 — H -замкнутые расширения хаусдорфова пространства X , причем $X_1 \in \mathcal{E}(X)$; тогда θ -непрерывное отображение X_1 на X_2 , тождественное на X , является непрерывным.

Следствие. Отображение частично упорядоченного множества $\mathcal{E}(X)$ на $\hat{\mathcal{E}}(X)$, задаваемое соответствием $X_D \mapsto \hat{X}_D \quad \forall D \in D_U$, является изоморфизмом.

Предложение 3. Пусть X — хаусдорфова пространство и $\hat{X}_1, \hat{X}_2 \in \hat{\mathcal{E}}(X)$; тогда из $\hat{X}_1 > \hat{X}_2$ и $\hat{X}_2 > \hat{X}_1$ следует, что $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$.

Предложение 4. Для любого хаусдорфова и не H -замкнутого пространства X частично упорядоченное множество $\hat{\mathcal{E}}(X)$ обладает единственным наибольшим элементом; оно обладает наименьшим элементом (которое тоже единственно) тогда и только тогда, когда X к тому же локально H -замкнуто.

Предложение 5. Для любого хаусдорфова пространства X частично упорядоченное множество $\hat{\mathcal{E}}(X)$ полно.

Замечание. Согласно следствию предложения 2, предыдущие предложения справедливы и для частично упорядоченного множества $\mathcal{E}(X)$; следовательно, сопоставляя эти предложения, непосредственно приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Для любого хаусдорфова пространства X частично упорядоченные множества $\hat{\mathcal{E}}(X)$ и $\mathcal{E}(X)$ образуют полурешетку сверху; они образуют полную решетку тогда и только тогда, когда X к тому же локально H -замкнуто.

Наибольшим элементом множества $\mathcal{E}(X)$ является катетовское расширение пространства X , оно соответствует разбиению U на одноточечные подмножества, т. е. случаю, когда Ψ_D совпадает с U . Этому же разбиению соответствует и фоминовское расширение $\delta X = (X_0 \cup U, W) = F\{X_0 \cup U, V\}$. Оба эти расширения принадлежат наибольшему классу множества $\mathcal{E}(X)$ и в множестве H -замкнутых расширений пространства X вместе оказываются носителями известных свойств стоун-чеховских расширений.

Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ — множество всех взаимно бикомпактных биекций (т. е. биекций, при которых образы и прообразы бикомпактных множеств бикомпактны) между наростами фоминовских расширений пространств X и Y , а $\text{Hom}(\hat{\mathcal{E}}(X), \hat{\mathcal{E}}(Y))$ — множество всех изоморфизмов полурешетки $\hat{\mathcal{E}}(X)$ на $\hat{\mathcal{E}}(Y)$.

Теорема 2. Для любых двух хаусдорфовых и не локально H -замкнутых пространств X и Y существует биекция $*$ $\Gamma_{X, Y}$ между множествами $\text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ и $\text{Hom}(\hat{\mathcal{E}}(X), \hat{\mathcal{E}}(Y))$ такая, что $\forall f \in \text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ и $\forall g \in \text{Hom}(\delta Y \setminus Y, \delta Z \setminus Z)$ $\Gamma_{X, Z}(g \circ f) = \Gamma_{Y, Z}(g) \circ \Gamma_{X, Y}(f)$. В случае, когда Y совпадает с X , $\Gamma_{X, X}$ сопоставляет тождественный изоморфизм полурешетки $\hat{\mathcal{E}}(X)$ тождественному отображению пространства $\delta X \setminus X$.

Пусть X и Y — локально H -замкнутые пространства и пусть $\text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ — множество всех гомеоморфизмов пространства $\delta X \setminus X$ на $\delta Y \setminus Y$, а $\text{Hom}(\hat{\mathcal{E}}(X), \hat{\mathcal{E}}(Y))$ — множество всех изоморфизмов решетки $\hat{\mathcal{E}}(X)$ на $\hat{\mathcal{E}}(Y)$.

Теорема 3. Для любых двух локально H -замкнутых и не H -замкнутых пространств X и Y , если $\delta X \setminus X$ не состоит из двух точек **, существует биекция $\Gamma_{X, Y}$ между множествами $\text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ и $\text{Hom}(\hat{\mathcal{E}}(X), \hat{\mathcal{E}}(Y))$ такая, что $\forall f \in \text{Hom}(\delta X \setminus X, \delta Y \setminus Y)$ и $\forall g \in \text{Hom}(\delta Y \setminus Y, \delta Z \setminus Z)$

* Здесь формально предполагается, что пустые множества тоже биективны.

** Если $\delta X \setminus X$ и $\delta Y \setminus Y$ состоят из двух точек то существуют два гомеоморфизма одного на другое, в то время как $\text{Hom}(\hat{\mathcal{E}}(X), \hat{\mathcal{E}}(Y))$ состоит всего из одного изоморфизма.

$\Gamma_{x,z}(g \circ f) = \Gamma_{y,z}(g) \circ \Gamma_{x,y}(f)$. В случае, когда Y совпадает с X , $\Gamma_{x,x}$ сопоставляет тождественный изоморфизм решетки $\mathcal{E}(X)$ тождественному гомеоморфизму пространства $\delta X \setminus X$.

На языке категорий и функторов теоремы 2 и 3 утверждают существование обратимого функтора между соответствующими категориями (каких именно, ясно из текста этих теорем).

Следствие 1. Для любых двух локально H -замкнутых и не H -замкнутых пространств X и Y решетки $\mathcal{E}(X)$ и $\mathcal{E}(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда наросты фоминовских расширений пространств X и Y гомеоморфны.

Следствие 2. Пусть X — локально H -замкнутое и не H -замкнутое пространство и $\delta X \setminus X$ не состоит из двух точек; тогда группа гомеоморфизмов пространства $\delta X \setminus X$ на себя изоморфна группе автоморфизмов решетки $\mathcal{E}(X)$.

Далее, подмножество катетовского расширения пространства X назовем условно бикомпактным, если оно бикомпактно в фоминовском расширении этого же пространства (заметим, что эти два расширения пространства X определены на одном и том же множестве $X_0 \cup U$). Пусть $\tilde{X} \in \mathcal{E}(X)$ и $\tilde{f}$ — непрерывное отображение катетовского расширения пространства X на $\tilde{X}$, тождественное на X . Разбиение D пространства $\tilde{X}$, при котором X разбивается на одноточечные подмножества, назовем допустимым, если $\tilde{f}^{-1}(d)$ условно бикомпактно для любого $d \in D$.

Теорема 4. Пусть X — произвольное хаусдорфово пространство и $\tilde{X} \in \mathcal{E}(X)$, тогда фактор-пространство $\tilde{X}(D)$ пространства $\tilde{X}$, соответствующее допустимому разбиению D , является H -замкнутым расширением пространства X , принадлежащим $\mathcal{E}(X)$, и $\tilde{X} > \tilde{X}(D)$.

Обратно, пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{E}(X)$ и $X_1 > X_2$; тогда X_2 является фактор-пространством пространства X_1 , соответствующим некоторому допустимому разбиению.

Следствие. Каждое H -замкнутое расширение произвольного хаусдорфова и не H -замкнутого пространства X с точностью до θ -эквивалентности расширений является фактор-пространством катетовского расширения пространства X , соответствующим некоторому разбиению на условно-бикомпактные подмножества, при котором X разбивается на одноточечные подмножества, и наоборот, фактор-пространство катетовского расширения пространства X , порожденное разбиением такого же вида, является его H -замкнутым расширением.

Институт математики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
4 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. Boboc, Ch. Siretchi, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie (N.S.), v. 5(53), 155 (1961).
- ² K. D. Magill jr., Proc. London Math. Soc., (3), v. 18, 231 (1968).
- ³ С. Г. Овсепян, ДАН, т. 224, № 4, 764 (1975).
- ⁴ O. Njåstad, J. London Math. Soc., v. 40, N 159, 526 (1965).
- ⁵ С. Г. Овсепян, ДАН, т. 206, № 4, 819 (1972).