

С. П. ПОНОМАРЕВ

К ВОПРОСУ ОБ АС-УСТРАНИМОСТИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 XI 1975)

Замкнутое множество F , содержащееся в области $D \subset \mathbb{C}$, называется АС-устранимым, если всякая функция, непрерывная в D и аналитическая в $D \setminus F$, является аналитической в D ⁽¹⁾. Классическая теорема об аналитическом продолжении утверждает, что всякая жорданова спрямляемая кривая АС-устранима. А. Безикович ⁽²⁾ показал, что всякое множество σ -конечной длины АС-устраσιμο, и, насколько известно автору, этот результат без каких-либо дополнительных условий не был усилен. В 1954 г. П. П. Белинский ^(3, 4) поставил задачу об АС-устранимости квазиконформных кривых (квазиконформная кривая — это K -квазиконформный образ отрезка). Затем в 1957 г. А. Мори ⁽⁵⁾ рассматривал эквивалентную задачу об устранимости отрезка в классе псевдоаналитических отображений. Отметим, что известны случаи АС-устранимости квазиконформных кривых, получаемые при дополнительных условиях, налагаемых на отображение в окрестности такой кривой (например, однолиственность, ограниченность интеграла Дирихле).

Цель настоящей заметки — показать, что в общем случае вопрос об АС-устранимости квазиконформных кривых решается отрицательно.

Теорема 1. *Существует квазиконформная кривая Γ , не устранимая в классе АС.*

Доказательство состоит в построении и исследовании примера.

1) Рассмотрим треугольник Δ_1^0 (замкнутый двумерный симплекс) с вершинами в точках $0, 1, (1+i \operatorname{tg} \theta)/2$, где $0 < \theta < \pi/100$. На первом шаге из Δ_1^0 выбрасывается открытый равнобедренный треугольник $(\lambda^2, 1-\lambda^2, (1+i \operatorname{tg} \theta)/2)$, где $\lambda = (2 \cos \theta)^{-1}$. Остаются два равных треугольника первого ранга Δ_1^1, Δ_2^1 , подобных Δ_1^0 . Затем с каждым из треугольников Δ_1^1, Δ_2^1 продолжается описанная выше процедура, т. е. из каждого выбрасывается открытый равнобедренный треугольник такой, что оставшиеся два треугольника равны между собой и подобны Δ_1^0 . Этот процесс продолжается неограниченно. На n -м шаге получаем 2^n равных треугольников n -го ранга $\{\Delta_k^n\}$, $1 \leq k \leq 2^n$, подобных Δ_1^0 . В качестве искомой кривой берется множество

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^n.$$

Пусть s_k^n — сторона треугольника Δ_k^n , лежащая против угла $\pi - 2\theta$, пусть Γ^n — ломаная, составленная из отрезков s_k^n , $1 \leq k \leq 2^n$. Существует гомеоморфизм $\varphi_n: [0, 1] \rightarrow \Gamma^n$, удовлетворяющий условиям:

а) $\varphi_n(0) = 0, \varphi_n(1) = 1$;

б) для каждого $1 \leq k \leq 2^n$ сужение φ_n на $\delta_k^n = [(k-1)/2^n, k/2^n]$ есть линейное отображение δ_k^n на s_k^n .

Очевидно, $\varphi = \lim \varphi_n$ существует и является параметризацией кривой Γ .

Примечание. Указанное выше построение Γ и φ не является новым и встречается у ряда авторов в связи с другими вопросами (см., например, ⁽⁶⁾, стр. 187). Здесь оно приведено только для полноты изложения.

2) Лемма 1. Для любых двух точек $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ справедливо неравенство

$$\sup_{t_1 \leq t', t'' \leq t_2} |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq 2\lambda^{-1} |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|.$$

Следствие. Кривая Γ удовлетворяет M -свойству Альфорса ⁽¹⁾ и поэтому является квазиконформной кривой.

3) На кривой Γ рассмотрим σ -алгебру A , состоящую из образов борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$ при отображении φ , и определим меру μ :

$$\mu E = \text{mes } \varphi^{-1}(E), \quad E \in A,$$

где mes — мера Лебега. Полагая $\Gamma_k^n = \Gamma \cap \Delta_k^n$, отметим, что мера μ совпадает с мерой Хаусдорфа

$$\mu_\alpha E = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i (\text{diam } \Gamma_{k_i}^{n_i})^\alpha \right\},$$

где $\alpha = (1 + \log_2 \cos \theta)^{-1}$, а $\inf$ берется по всем покрытиям $\{\Gamma_{k_i}^{n_i}\}$ множества E , для которых $\sup \{\text{diam } \Gamma_{k_i}^{n_i}\} \leq \delta$.

4) Рассмотрим теперь функцию

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}.$$

Аналитичность f вне Γ очевидна. Мы покажем, что f непрерывна в точках кривой Γ .

Лемма 2. Пусть z — вершина при угле θ в треугольнике Δ_k^n . Тогда

$$\int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} \leq \frac{\cos^{n+1} \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (1)$$

Доказательство. Предварительно заметим, что $\mu \Gamma_k^n = 2^{-n}$. Пусть для определенности $z = \varphi(2^{-n}(k-1))$. Если $\xi \in \Gamma_{2^p(k-1)+2}^{n+p}$, $p \geq 1$, то в силу выбора θ выполняется неравенство $|\xi - z| \geq \lambda^{n+p}$, откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\Gamma_{2^p(k-1)+2}^{n+p}} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} \leq \frac{\cos^{n+1} \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Следствие. Если z — вершина при угле $\pi - 2\theta$ треугольника Δ_k^n , то

$$\int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} \leq \frac{2 \cos^{n+2} \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (2)$$

С помощью оценок (1), (2) доказывается

Лемма 3. Для любой Γ_k^n и любого z выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} \leq \frac{4 \cos^{n+2} \theta}{(1 - \cos \theta)^2}. \quad (3)$$

5) Оценка (3) позволяет установить непрерывность f в точках Γ . Пусть V — множество всех вершин всех треугольников $\{\Delta_k^n\}$, $z_0 \in \Gamma \setminus V$, и пусть Δ_k^n — произвольный треугольник, содержащий z_0 . Так как

$\text{dist}(z_0, \Gamma \setminus \Delta_k^n) > 0$, то, переходя к верхнему пределу при $z \rightarrow z_0$ в неравенстве

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} + \int_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z_0|} + |z - z_0| \left| \int_{\Gamma \setminus \Delta_k^n} \frac{d\mu(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} \right|$$

и используя (3), получаем

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| \leq 8(1 - \cos \theta)^{-2} \cos^{n+2} \theta,$$

откуда следует непрерывность f в точке z_0 ввиду произвольности n . Почти аналогично рассматривается случай $z_0 \in V$. Легко видеть, что построенная функция f не является аналитической на Γ .

6) В (6) показано, что $\varphi'(t) = \infty$ для всех $t \in [0, 1]$. В связи с этим можно отметить следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть Γ — квазиконформная кривая и $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ — параметризация Γ . Если в каждой точке $t \in [0, 1]$ равенство $\varphi'(t) = \infty$ не выполняется, то Γ АС-устранима.

Московский институт
стали и сплавов

Поступило
12 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Ahlfors, A. Beurling, Acta Math., v. 83, 101 (1950). ² С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949. ³ П. П. Белинский, Квазиконформные отображения, Канд. дисс., Львов, 1954. ⁴ П. П. Белинский, Общие свойства квазиконформных отображений, Новосибирск, 1974. ⁵ A. Mori, Trans. Am. Math. Soc., v. 84, 56 (1957). ⁶ Ю. Ю. Трохимич, Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963. ⁷ Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, «Мир», 1969.