

Б. А. РЯБОВ, Г. П. САЧКОВ

О ТРЕБОВАНИЯХ КОРРЕКТНОСТИ В ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком В. Н. Петровым 26 V 1975)

Среди различных способов решения задачи инвариантности какой-либо координаты относительно внешнего возмущения для линейных систем с постоянными и переменными параметрами решение задачи инвариантности с позиций накопления возмущений и, в частности, в постановке задачи Булгаковым позволяет всегда получить неулучшаемую оценку близости системы к абсолютно инвариантной (¹, ²). Оценка получается при минимальной априорной информации относительно внешних воздействий и помех — их ограниченности. В тех случаях, когда внешние воздействия и помехи содержат случайную составляющую, указание однозначной конечной верхней границы неосуществимо, и тогда целесообразно представлять внешние возмущения $f(t)$, как $f(t) = f_-(t) + f_+(t)$; $f_-(t)$ является систематической, $f_-(t) = \chi \operatorname{sgn} \psi(t)$, где χ — положительная постоянная, характеризующая ограниченность по модулю, $\psi(t)$ — произвольная знакопеременная функция; $f_+(t)$ — случайная функция со средним значением, равным нулю. Вид $f_-(t)$ обусловлен тем, что наихудшими внешними ограниченными возмущениями в задаче накопления являются возмущения, принимающие экстремальные значения. Таким образом, относительно внешнего возмущения полагают известным модуль систематической составляющей и второй момент случайной составляющей.

Для того чтобы в рамках одного рассмотрения исследовать прямые и косвенные оценки накопления возмущений, введем непрерывную сложную функцию $G[k(t, \tau)]$ от импульсной функции $k(t, \tau)$ системы со следующими свойствами:

- 1) $G[y] > 0, y \neq 0; G[0] = 0;$ 2) $\int_0^t G[k(t, \tau)] d\tau < \infty$ при любом фикси-

рованном $t \in [0, \infty)$. В частности, для систем с постоянными параметрами при $G[k(\xi)] = |k(\xi)|$, где $\xi = t - \tau$, свойство 2 дает необходимое и достаточное условие устойчивости

$$\int_0^\infty G[k(\xi)] d\xi < \infty;$$

при этом из свойств функции $G[k(\xi)]$ ограниченности и непрерывности импульсной функции $k(\xi)$ и ее производной при $\xi \geq 0$ следует $\lim_{\xi \rightarrow \infty} k(\xi) = 0$ (см. лемму (³), стр. 50).

Мерой абсолютной инвариантности какой-либо координаты по отношению к внешнему возмущению $f(t)$ в общем случае может служить величина W , равная сумме среднего квадрата отклонения вынужденной компоненты, обусловленной $f_+(t)$, от желаемого состояния $z(t) = 0$ и второго слагаемого, умноженного на размерную единицу и представляющего собой оценку накопления обусловленного $f_-(t)$. Конкретное выражение W при несущественном для дальнейшего предположении стационарности систе-

мы и случайной составляющей возмущения имеет на бесконечном интервале времени вид

$$W = K_{zz}(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xz}(\tau) k(\tau) d\tau + \\ + \iint_{-\infty}^{+\infty} K_{xx}(\tau - \xi) k(\tau) k(\xi) d\tau d\xi + \chi \int_{-\infty}^{+\infty} G[k(\xi)] d\xi, \quad (1)$$

где $K_{xx}(t)$, $K_{zz}(t)$ — автокорреляционные функции случайной составляющей внешнего возмущения и соответственно идеального сигнала на выходе, $K_{xz}(t)$ — взаимная корреляционная функция. Обозначим через $v(\xi)$ импульсную функцию, доставляющую минимум величине W . Тогда новая переменная $w(\xi)$, равная

$$\frac{\chi}{2} w(\xi) = \frac{\chi}{2} G'_v[v(\xi)] - K_{xz}(\xi), \quad (2)$$

должна удовлетворять нелинейному интегральному уравнению Гаммерштейна

$$w(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx}(s-t) f(w, t, \mu) dt, \quad (3)$$

где параметр μ обратно пропорционален χ . Для абсолютно инвариантных систем в силу желаемого состояния $z(t)$, равного нулю, корреляционные функции $K_{zz}(t)$, $K_{xz}(t)$ равны нулю. Автокорреляционная функция $K_{xx}(\tau - \xi)$ в большинстве случаев представима через экспоненты, тригонометрические функции, многочлены⁽⁴⁾, что позволяет записать ее в виде вырожденного ядра

$$K_{xx}(\tau - \xi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(t).$$

Бесконечный интервал времени накопления в (1) взят с учетом монотонности максимального отклонения.

Исходя из рассмотренных выше положений, ищем решение задачи абсолютной инвариантности с оценкой вида (1) и ее корректность, где под последней понимается существование решения функционального уравнения, определяющего инвариантный оператор, единственность решения и его непрерывность от начальных данных. Пусть функция $F = G'_v[v(\xi)]$, равная тождественно нулю только при $v(\xi) = 0$, имеет обратную гладкую функцию $F^{-1} = f(w, t, \mu)$ вида

$$f(w_0 + u, t, \mu) = \mu \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t) u^m, \quad (4)$$

где ряд сходится равномерно, $w_0(s)$ есть непрерывное решение уравнения (3) при некотором $\mu = \mu_0$. Определим постоянную матрицу $C = \|c_{ij}\|_1^n$ выражением

$$c_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(t) \psi_i(t) \varphi_j(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где интегралы конечны и для малых изменений подынтегральных функций. Тогда из (1) следует, что минимум $W = 0$ достигается только в абсолютно инвариантных системах с $v(\xi) = 0$ и $\mu_0 = 2/\chi_0$. При конечном μ справедливо утверждение: достаточным условием корректности решения задачи абсолютной инвариантности является отсутствие (регулярный случай)

у характеристического уравнения матрицы C положительных действительных корней.

Действительно, при достаточно малом μ_0 и оговоренных выше условиях уравнение (3) имеет только нулевое решение $w_0(s)=0$ (5). Тогда на основании (3) и (4) можно записать

$$u(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t) u(t) dt = \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} B_{mn}(s, t) u^m(t) dt, \quad (5)$$

где $\mu = \mu_0 + \lambda$, $\mu \neq 0$; $K(s, t) = \mu_0 K_{xx}(s-t) A_1(t)$, $B_{m0}(s, t) = \mu_0 K_{xx}(s-t) A_m(t)$, $B_{m1}(s, t) = K_{xx}(s-t) A_m(t)$, $B_{mn}(s, t) = 0$, $n \geq 2$. Для уравнения (5) исследованию подлежат все непрерывные решения $u_\lambda(s)$, для которых $u_\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Обозначим через u_λ' производную от решения по параметру λ , тогда из уравнения (5) непосредственно можно получить, что u_λ' удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма II рода с ядром, равным $\mu K_{xx}(s-t) \cdot A_1(t)$. Отсутствие у характеристического уравнения матрицы C положительных действительных корней обеспечивает для этого интегрального уравнения основной случай альтернативы, и в силу первой теоремы Фредгольма однозначно определяется функция u_λ' , откуда следует, что бифуркационные значения при $\lambda > 0$ отсутствуют и имеет место единственность решения $u(s)=0$. В силу непрерывности характеристического многочлена матрицы C при малых изменениях начальных данных делаем заключение о корректности задачи.

Особо отметим частный, но важный случай, когда $\mu \rightarrow \infty$. Тогда в пределе, как известно, получается некорректно поставленная задача, решение которой можно провести на основе тихоновских стабилизаторов p -го порядка (6). При этом получается вспомогательный функционал того же вида (1), где роль χ играет параметр регуляризации, и решение этой вспомогательной задачи проводится в соответствии с указанной литературой.

Имея в виду возможность обобщения проводимого рассмотрения на случай систем с переменными параметрами, можно утверждать, что предшествующие выводы и соотношения сохраняют силу и в этом случае, с тем отличием, что под $k(\xi)$, $\xi = t - \tau$, следует понимать $k(t, \tau)$, под $w(s)$ в уравнении (3) — $w(t, \tau)$ и т. д., а все верхние пределы интегрирования в приведенных выше выражениях заменяются на t , так как величина W в этом случае минимизируется для момента времени t . При этом случайная составляющая $f_+(t)$ возмущения $f(t)$ может быть и нестационарной случайной функцией, однако если на корреляционную функцию $K_{xx}(s, t)$ наложить некоторые часто выполняемые на практике условия (4), то и тогда ядро $K_{xx}(s, t)$ получается вырожденным и, следовательно, сохраняет силу проводимое рассмотрение. В простейшем случае, когда $G[k(t, \tau)]$ квадратично зависит от $k(t, \tau)$, уравнение (3) представляет собой как для систем с постоянными, так и переменными параметрами линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода, решение которого корректно по Адамару.

Пусть в некоторой окрестности U нуля того линейного пространства, в котором исследуется вопрос о решениях, при $\lambda=0$ уравнение (5) имеет лишь нулевое решение, тогда будем говорить, что нуль является изолированным решением. Изолированность нулевого решения имеет место не только в регулярном случае, когда 1 не является собственным значением оператора A (A — линейный интегральный оператор уравнения (5)), но и может иметь место в нерегулярном случае, когда 1 является собственным значением кратности $r \geq 1$ оператора A . Используя результаты (7) о необходимых и достаточных условиях изолированности нулевого решения в нерегулярном случае и о конечном числе малых решений уравнения (5), делаем вывод о корректности задачи в нерегулярном случае, если конечное число малых решений равно единице. При этом наиболее простым является случай $r=1$, когда изолированность решения уравнения (5) при $\lambda=0$

не накладывает жесткие ограничения на начальные данные, поскольку эти ограничения сводятся к отличию от нуля хотя бы одного из бесконечного числа некоторых коэффициентов, интегрально зависящих от начальных данных.

Отметим, что математическая модель динамической системы, принимаемая для исследований и получаемая, как правило, при допущениях малости каких-либо параметров, должна удовлетворять критерию физической осуществимости и при малых возмущениях модели. В этой связи укажем на такие малые возмущения оператора A , которые надлежащей заменой переменных приводят к исследуемому виду (5) и тогда в регулярном случае возмущенное уравнение с таким оператором

$$u(s) - \int_{\sigma} [K(s, t)u(t) + \kappa \sum_{m=0}^k B_m(s, t)u^m(t)] dt = 0 \quad (6)$$

не будет содержать соответствующих неустойчивым системам решений, стремящихся к бесконечности как κ^{-p} , если вспомогательное уравнение, получаемое из (6) при $B_m(s, t) = 0$, $m = 0, \dots, k-1$, и $\kappa = 1$ имеет лишь нулевое решение, при этом κ — малый параметр, p — положительное рациональное число, $B_m(s, t)$ — непрерывные функции $0 \leq m \leq k$, $k \geq 2$, σ — ограниченное замкнутое множество евклидова пространства ⁽⁷⁾. Действительно, заменой ⁽⁸⁾ $\lambda u = u_1$, $\kappa = \lambda^{k-1}$ уравнение (6) немедленно сводится к виду (5) для регулярного случая, откуда и следует с учетом представимости решения в ряд по λ отсутствие неустойчивых решений.

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что учет только систематической составляющей внешнего возмущения всегда приводит к корректно поставленной задаче инвариантности, тогда как учет только случайной составляющей приводит к некорректной постановке. Если учитывать обе составляющие возмущения, то нарушение корректности может иметь место только при конечном числе бифуркационных значений параметра μ , являющихся обратными величинами корней характеристического уравнения матрицы C . Особенностью рассмотрения является то, что параметр χ , определяющий μ , имеет физическую природу и в то же время его можно трактовать как коэффициент в методе регуляризации некорректной задачи. В этом смысле среди различных методов регуляризации, равноправных с математической точки зрения, предпочтительнее представляются методы, имеющие физическую природу и связанные непосредственно с характеристиками внешнего возмущения. Определяемые условием абсолютной инвариантности $v(\xi) = 0$ требования к параметрам системы представляют физический интерес, если полученная абсолютно инвариантная система остается устойчивой хотя бы при малых («грубость в малом» ⁽⁹⁾) изменениях параметров собственного оператора системы. Это означает, что корректность задачи является необходимым условием практической реализации абсолютно инвариантных систем. При соблюдении требований корректности основополагающими для построения широкого класса реальных инвариантных систем являются необходимые и достаточные условия физической осуществимости в сочетании с принципом двухканальности.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
10 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Современные методы проектирования систем автоматического управления. Раздел I. «Машиностроение», 1967. ² Б. А. Рябов, Г. П. Сачков, Тр. IV Всесоюз. совещ. по теории инвариантности и теории чувствительности автоматических систем, ч. 3, Киев, 1971. ³ М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, «Наука», 1963. ⁴ И. Питерсон, Статистический анализ и оптимизация системы автоматического управления, «Советское радио», 1964. ⁵ Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960. ⁶ А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, «Наука», 1974. ⁷ М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», 1969. ⁸ В. А. Треногин, ДАН, т. 140, № 2 (1961). ⁹ Б. А. Рябов, Г. П. Сачков, ДАН, т. 217, № 1 (1974).