

В. В. ПОПОВ

## О ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 1 IV 1976)

В заметке приводится ряд теорем о связи топологических свойств пространств  $X$  и  $\text{ехр } X$ . Пространство  $\text{ехр } X$  определено в <sup>(1)</sup>.

Пусть  $X$  — топологическое пространство, тогда точками пространства  $\text{ехр } X$  являются замкнутые подмножества пространства  $X$  (при этом множеству  $F$  соответствует точка  $(F)$  пространства  $\text{ехр } X$ ). Базу топологии на множестве  $\text{ехр } X$  образуют множества вида  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ , где  $n$  — натуральное число,  $U_i$  — открытые подмножества  $X$ . При этом  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{(F) \in \text{ехр } X: F \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ и } F \cap U_i \neq \Lambda \text{ при всех } i \leq n\}$ .

Через  $|X|$ ,  $w(X)$ ,  $\chi(X)$ ,  $c(X)$ ,  $t(X)$  и  $\pi(X)$  обозначены соответственно мощность, вес, характер, число Суслина, теснота и  $\pi$ -вес пространства  $X$ ;  $\omega_0, \omega_1, \dots$  обозначают начальные ординалы,  $\aleph_1, \aleph_2, \dots$  — кардиналы;  $c = 2^{\aleph_0}$  есть мощность континуума; ZFC есть система аксиом Цермело — Френкеля вместе с аксиомой выбора; CH или GCH есть модели теории множеств, в которых выполняется континуум-гипотеза и соответственно обобщенная континуум-гипотеза. Через  $N$  обозначается счетное дискретное пространство.

I. Известно, что метризуемость пространства  $\text{ехр } X$  влечет метризуемость  $X$ , однако последняя может следовать и из более слабых ограничений на  $\text{ехр } X$ .

Пространство  $Z$  называется совершенным, если всякое его замкнутое подмножество есть множество типа  $G_\delta$ .

Теорема 1. *Регулярное пространство  $X$  является компактом тогда и только тогда, когда пространство  $\text{ехр } X$  совершенно.*

Пространство  $Z$  имеет диагональ типа  $G_\delta$ , если диагональ  $\Delta = \{(z, z): z \in Z\}$  является множеством типа  $G_\delta$  в декартовом произведении  $Z \times Z$ .

Теорема 2. *Пусть  $X$  регулярно и слабо паракомпактно, тогда  $\text{ехр } X$  — пространство с  $G_\delta$ -диагональю тогда и только тогда, когда  $X$  — пространство со счетной базой.*

Теорема 3. *Регулярное  $X$  является компактом тогда и только тогда, когда топология пространства  $\text{ехр } X$  является пересечением счетного числа метризуемых топологий.*

Теорема 4. *Регулярное  $X$  является компактом в том и только том случае, когда пространство  $\text{ехр } X$  симметризуемо.*

При доказательстве теоремы 4 используется

Предложение 1. *Пусть пространство  $X$  не счетно-компактно, тогда пространство  $\text{ехр } X$  содержит замкнутое подпространство, гомеоморфное прямой Зоргенфрея <sup>(2)</sup>.*

Теорема 5. *Регулярное  $X$  является компактом тогда и только тогда, когда пространство  $\text{ехр } X$  имеет счетную тесноту.*

II. Рассмотрим условия, при которых  $\text{ехр } X$  является  $k$ -пространством. Все необходимые определения можно найти в работах <sup>(3-5)</sup>.

Теорема 6. *Пусть  $X$  нормально и  $\text{ехр } X$  —  $k$ -пространство, тогда  $X = X_1 \cup X_2$ , где  $X_1$  — счетно-компактное подпространство счетного характера в  $X$ ,  $|X_2| \leq \aleph_0$  и точки  $X_2$  изолированы в  $X$ .*

**Замечание.** Требование нормальности  $X$  может быть ослаблено до требования  $\aleph_0$ -хаусдорфовости и регулярности.

**Теорема 7.** Для паракомпакта  $X$  следующие условия эквивалентны: а)  $\text{ехр } X - k$ -пространство; б)  $X = X_1 \cup X_2$ , где  $X_1$  — бикомпакт счетного характера,  $|X_2| \leq \aleph_0$  и  $X_2$  состоит из изолированных в  $X$  точек; в)  $\text{ехр } X -$ пространство точечно-счетного типа; г)  $\text{ехр } X - k_2$ -пространство.

**Следствие.** Пусть  $X$  регулярно и  $\text{ехр } X - k$ -пространство. Тогда  $X$  локально метризуемо в точках счетной локальной мощности.

**Теорема 8.** Пусть  $X$  — паракомпакт и  $\text{ехр } X - k_1$ -пространство. Тогда  $\text{ехр } X$  или бикомпакт, или пространство с 1-ой аксиомой счетности.

**Теорема 9.** Пусть  $X$  — паракомпакт и  $\text{ехр } X -$ перистое пространство. Тогда  $X$  — бикомпакт.

**Теорема 10.** Регулярное сильно счетно-компактное пространство характера  $\aleph_1$  является  $k_2$ -пространством.

**Теорема 11.** Пусть  $X$  — нормальное сильно счетно-компактное пространство, всякое замкнутое подпространство которого имеет вес и характер в  $X$ , не превосходящие  $\aleph_1$ . Тогда  $\text{ехр } X - k_2$ -пространство.

**Теорема 12.** Пусть  $X$  — есть  $\Sigma$ -произведение не более чем  $\aleph_1$  бикомпакта счетной тесноты веса  $\aleph_1$ . Тогда  $\text{ехр } X - k_2$ -пространство.

Ограничение на число сомножителей существенно:

**Теорема 13.** Если экспонента  $\Sigma$ -произведения является  $k$ -пространством, то число неодноточечных сомножителей меньше  $2^{\aleph_1}$ .

**Теорема 14.** Если экспонента  $\sigma$ -произведения хаусдорфовых пространств является  $k$ -пространством, то число неодноточечных сомножителей конечно.

Сходные результаты могут быть получены для подпространств  $\text{ехр } X$ . Так, в теоремах 1 — 5 пространство  $\text{ехр } X$  может быть заменено на подпространство экспоненты, точки которого соответствуют каноническим замкнутым множествам в  $X$ ; правда, при этом необходимо наложить несколько большие требования на отделимость  $X$ . В некоторых теоремах  $\text{ехр } X$  может быть заменена на пространство компактных подмножеств:

**Теорема 15.** Если пространство компактных подмножеств  $\Sigma$ -произведения является  $k$ -пространством, то число неодноточечных сомножителей счетно.

III. В данном пункте рассмотрим условия, при которых  $\Sigma$ -произведение является  $k$ -пространством.

**Теорема 16.** Пусть  $X = \Sigma\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ , где  $X_\alpha$  — бикомпакт характера  $\aleph_1$  при каждом  $\alpha \in A$ . Тогда  $X - k_2$ -пространство.

Ограничение на характер бикомпактов существенно:

**Теорема 17.** Пусть при  $\alpha < \omega_1$  имеем  $x_\alpha = x_0 \in X = X_\alpha$  и пространство  $\Sigma_{(x_\alpha)}\{X_\alpha: \alpha < \omega_1\}$  является  $k$ -пространством.

Тогда если  $x_0 \in [M] \setminus [M]_{\aleph_0}$  и  $M \subset X$ ,  $|M| = \aleph_1$ , то существует  $M_0 \subset [M]_{\aleph_0}$  такое, что  $|M_0| = \aleph_1$  и множество  $M_0 \setminus O_{x_0}$  счетно для всякой окрестности  $O_{x_0}$  точки  $x_0$  в  $X$ .

Здесь  $[M]_{\aleph_0} = \bigcup \{[M'] : M' \subset M, |M'| \leq \aleph_0\}$  —  $\aleph_0$ -замыкание множества  $M$  (см. (6)).

**Теорема 18.** Пусть  $X - \Sigma$ -произведение  $\aleph_1$  экземпляра тихоновского куба веса континуума. Тогда утверждение « $X$  есть  $k$ -пространство» не зависит от системы аксиом ZFC.

**Теорема 19.**  $\Sigma$ -произведение линейно упорядоченных бикомпактов является  $k$ -пространством, если выполнено одно из условий:

а) число сомножителей не больше  $\aleph_1$ ;

б) если обозначить через  $x_\gamma$  проекцию базисной точки на сомножитель  $X_\gamma$ , то для каждого сомножителя из  $\lambda < \chi(x_\gamma, X_\gamma)$  должно следовать  $\lambda^{\aleph_0} < \chi(x_\gamma, X_\gamma)$ .

В частности, если характер каждого пространства  $X_\gamma$  меньше  $\aleph_\omega$ , то

$\Sigma$ -произведение линейно упорядоченных бикомпактов является  $k$ -пространством в предположении обобщенной континуум-гипотезы.

Сходные результаты могут быть получены для  $\sigma$ -произведений, например

**Теорема 20.**  $\sigma$ -произведение линейно упорядоченных бикомпактов всегда является  $k$ -пространством.

IV. Сформулируем теорему категорного характера, которая связывает строение бикомпактных расширений данного пространства со свойствами всех непрерывных его образов. Нам потребуется

**Определение.** Пусть  $\mathcal{R} = \{Z\}$  — некоторый класс топологических пространств, сохраняющийся при непрерывных отображениях и наследственный по замкнутым подмножествам. Пространство  $X$  назовем  $k\mathcal{R}$ -пространством, если для всякого незамкнутого подмножества  $M$  пространства  $X$  существует  $Z \subset X$ ,  $Z \in \mathcal{R}$  такое, что  $M \cap Z$  не замкнуто в  $Z$ .

Сходные понятия были введены Коэном <sup>(7)</sup> и Башкировым <sup>(8)</sup>. Нетрудно проверить следующие свойства: при фиксированном  $\mathcal{R}$  класс  $k\mathcal{R}$ -пространств наследствен по замкнутым подмножествам, наследствен по открытым подмножествам, сохраняется при замкнутых отображениях и всякое локально- $k\mathcal{R}$ -пространство (определяемое стандартным образом) является  $k\mathcal{R}$ -пространством.

**Теорема 21.** В классе вполне регулярных пространств для пространства  $X$  эквивалентны следующие условия:

- а) всякий непрерывный образ пространства  $X$  —  $k\mathcal{R}$ -пространство;
- б) всякий непрерывный образ пространства  $X$  при уплотнении является  $k\mathcal{R}$ -пространством;
- в) для всякой точки  $\xi \in \beta X \setminus X$  подпространство  $X \cup \{\xi\}$  пространства  $\beta X$  является  $k\mathcal{R}$ -пространством;
- г) для всякого бикомпактного расширения  $b X$  пространства  $X$  и всякой точки  $\eta \in b X \setminus X$  подпространство  $X \cup \{\eta\}$  пространства  $b X$  является  $k\mathcal{R}$ -пространством.

По аналогии с конструкцией А. В. Архангельского для всякого ординала  $\alpha$  в произвольном пространстве  $X$  можно ввести понятие  $k_\alpha \mathcal{R}$ -замыкания. Пространство  $X$  назовем  $k_\alpha \mathcal{R}$ -пространством, если замыкание произвольного подмножества пространства  $X$  совпадает с его  $k_\alpha \mathcal{R}$ -замыканием. Теорема 21 останется справедливой, если термин  $k\mathcal{R}$ -пространство заменить всюду термином  $k_\alpha \mathcal{R}$ -пространство.

**Примеры.** Пусть  $\mathcal{R}_1 = \{Z: Z \text{ — бикомпакт}\}$ ,  $\mathcal{R}_2\{Z: Z \text{ — компакт}\}$ ,  $\mathcal{R}_3 = \{Z: Z \text{ счетно}\}$ ,  $\mathcal{R}_4 = \{Z: Z \text{ счетно компактно}\}$ . Тогда  $k\mathcal{R}_1$ -пространства есть в точности  $k$ -пространства,  $k_1\mathcal{R}_1$  суть  $k_1$ -пространства,  $k\mathcal{R}_2$  — секвенциальные пространства,  $k_1\mathcal{R}_2$  — пространства Фреше — Урысона,  $k\mathcal{R}_3$  — пространства счетной тесноты,  $k\mathcal{R}_4$  — квази- $k$ -пространства.

Таким образом, теорема 21 останется справедливой, если термин  $k\mathcal{R}$ -пространство заменить всюду одним из следующих терминов: а)  $k$ -пространство, б)  $k_1$ -пространство, в) секвенциальное пространство, г) пространство Фреше — Урысона, д) пространство счетной тесноты, е) квази- $k$ -пространство.

Теорема 21 имеет многочисленные применения, среди которых отметим следующие:

**Теорема 22.** Если всякий непрерывный образ  $\Sigma$ -произведения имеет счетную тесноту, то число неодноточечных сомножителей счетно.

**Теорема 23.** Пусть  $X$  —  $\Sigma$ -произведение бикомпактов веса  $\aleph_1$ .

Тогда всякий непрерывный образ пространства  $X$  является  $k$ -пространством тогда и только тогда, когда число неодноточечных сомножителей не превосходит  $\aleph_1$ .

**Теорема 24.** Пусть всякий непрерывный образ  $\aleph_0$ -хаусдорфова пространства  $X$  секвенциален. Тогда  $X$  — бикомпакт.

Отметим, что требование  $\aleph_0$ -хаусдорфовости существенно.

V. Рассмотрим строение экспоненты дискретного пространства. Через  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}_1$  будет обозначаться дискретное пространство.

Теорема 25. Пусть  $|\mathcal{D}|=\lambda$ , тогда  $\exp \mathcal{D}$  гомеоморфно прямой сумме  $\lambda$  экземпляров пространства  $\exp \mathcal{D}$ .

Пусть  $\exp^* N$  — такое подпространство пространства  $\exp N$ :

$$\exp^* N = \{(F) \in \exp N: |F| = \aleph_0\}$$

Теорема 26. Пространство  $\exp^* N$  гомеоморфно прямой сумме континуума своих экземпляров.

При доказательстве теоремы 26 строится система почти дизъюнктивных подмножеств счетного множества, позволяющая получить

Пример 1. Существует бикомпакт  $B = \{x_0\} \cup \mathcal{D} \cup N$ , где

а)  $\{x_0\} \cup \mathcal{D}$  — одноточечная компактификация дискретного пространства  $\mathcal{D}$  мощности  $\aleph_1$ ;

б)  $B$  — бисеквенциальное <sup>(9)</sup> пространство;

в) в некоторой модели теории множеств пространство  $B$  наследственно нормально.

Теорема 27. Пусть  $n < \omega$ ,  $|\mathcal{D}| = \lambda$ ,  $(F_i) \in \exp \mathcal{D}$ ,  $(F_i') \in \exp \mathcal{D}$ ,  $|F_i| = |F_i'|$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда существует  $\lambda$  различных гомеоморфизмов пространства  $\exp \mathcal{D}$  на себя, переводящих  $(F_i)$  в  $(F_i')$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Теорема 28. Если  $S \subset \exp^* N$ ,  $S' \subset \exp^* N$  и  $|S| = |S'| < \aleph_0$ , то существует  $2^n$  различных гомеоморфизмов пространства  $\exp^* N$  на себя, переводящих  $S$  в  $S'$ .

VI. Рассмотрим строение подмножеств экспоненты.

Теорема 29. Если  $\mathfrak{B}$  — бикомпактное подмножество экспоненты регулярного совершенного пространства, то в  $\mathfrak{B}$  плотно множество точек с 1-ой аксиомой счетности.

Теорема 30. Если  $Z \subset \mathfrak{B} \subset \exp \mathcal{D}$  и  $\mathfrak{B}$  — бикомпакт, то  $Z$  содержит изолированную точку.

Теорема 31. Если  $\mathfrak{B}$  — бикомпакт и  $\mathfrak{B} \subset \exp \mathcal{D}$ , то для  $\mathfrak{B}$  совпадают мощность, характер и число Суслина.

Следствие. Если  $G \subset \exp \mathcal{D}$  и  $G$  — пространство бикомпактной топологической группы, то  $G$  конечно.

Теорема 32. Всякое счетное метрическое пространство замкнуто вкладывается в пространство  $\exp N$ .

Теорема 33. Если  $Z \subset \exp \mathcal{D}$ ,  $|Z| \leq \lambda$ ,  $\chi(Z) \leq \lambda$ , то  $Z$  вкладывается в пространство  $\exp \mathcal{D}_1$ , где  $|\mathcal{D}_1| = \lambda$ .

Отметим, что ограничение на характер существенно.

В заключение автор выражает признательность А. В. Архангельскому и В. В. Филиппову за ряд ценных вопросов и замечаний, а также за внимание к работе.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
5 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> L. Vietoris, Monatschr. Math. Phys., v. 32, 258 (1922). <sup>2</sup> R. Sorgenfrey, Bull. Am. Math. Soc., v. 53, 631 (1947). <sup>3</sup> Дж. Л. Келли, Общая топология, М., 1965.  
<sup>4</sup> А. В. Архангельский, ДАН, т. 150, № 1, 9 (1963). <sup>5</sup> N. E. Steenrod, Michigan Math. J., v. 14, № 2, 133 (1967). <sup>6</sup> А. В. Архангельский, ДАН, т. 199, № 6, 1227 (1971). <sup>7</sup> D. E. Cohen, Quart. J. Math., Ser. 2, v. 5, 77 (1954). <sup>8</sup> А. И. Башкиров, ДАН, т. 207, № 5, 1025 (1972). <sup>9</sup> E. Michael, Pittsburg Intern. Topol. Conf., 1970.