

В. Н. СЕРЕЖКИН

ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p > 5$

(Представлено академиком В. М. Глушковым 11 XI 1975)

Хорошо известна классификация конечных линейных групп, порожденных отражениями, над полем нулевой характеристики ^(1-4, 9). Разработанные при этом методы существенно использовали предположение о том, что характеристика поля равна нулю. Естественным образом возникает задача об описании всех неприводимых линейных групп над конечным полем, порожденных отражениями. В явной форме этот вопрос сформулирован А. Е. Залесским в ⁽⁵⁾. В силу работы ⁽⁶⁾ эта задача сводится к классификации неприводимых линейных групп, порожденных отражениями и не содержащих трансвекций.

Если G — конечная неприводимая импримитивная линейная группа, порожденная отражениями, то группа G , как хорошо известно, в подходящем базисе приводится к мономиальному виду; классификация таких групп по существу не отличается от случая, когда характеристика поля равна нулю. Таким образом, основным является случай, когда группа G примитивна.

В настоящей работе классифицируются неприводимые примитивные линейные группы над конечным полем K характеристики $p > 5$, порожденные отражениями и не содержащие трансвекций.

Пусть V — векторное пространство размерности $n > 1$ над полем K характеристики $p \neq 2$, e — единичный элемент полной линейной группы $GL(V)$.

Определение 1. Пусть $\tau \in GL(V)$ — такой элемент, что $\dim (\tau - e)V = 1$. Если $\tau^2 = e$, то элемент τ называется отражением; если $(\tau - e)^2 = 0$, то элемент τ называется трансвекцией.

Определение 2. Линейная группа $G \subset GL(V)$ называется группой отражений, если:

- 1) группа G порождается отражениями;
- 2) группа G не содержит трансвекций.

Основная теорема. Пусть V — векторное пространство размерности $n > 3$ над конечным полем K характеристики $p > 5$; пусть $G \subset GL(V)$ — неприводимая примитивная группа отражений.

Тогда, с точностью до сопряженности в $GL(V)$, G — одна из следующих групп:

- 1) ортогональная группа $O_{2m+1}(F)$ или $O_{2m}^e(F)$, где F — некоторое подполе поля K ; $n = 2m + 1$ или $n = 2m$ соответственно;
- 2) симметрическая группа S_{n+1} , $n + 1 \neq 0 (p)$, или симметрическая группа S_{n+2} , $n + 2 = 0 (p)$;
- 3) девять исключительных групп, а именно

$$\begin{aligned} &W(F_4), W(N_4), EW(N_4), W(H_4) \text{ при } n=4; \\ &W(K_5) \text{ при } n=5; W(K_6), W(E_6) \text{ при } n=6; \\ &W(E_7) \text{ при } n=7; W(E_8) \text{ при } n=8. \end{aligned}$$

Порядки исключительных групп следующие:

$$\begin{aligned} |W(F_4)| &= 2^7 \cdot 3^2, & |W(N_4)| &= 2^9 \cdot 3 \cdot 5, & |EW(N_4)| &= 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5, \\ |W(H_4)| &= 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2, & |W(K_5)| &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5, & |W(K_6)| &= 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7, \\ |W(E_7)| &= 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7, & |W(E_8)| &= 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Поясним, что группы в п. 3) получаются редукцией по модулю p конечных неприводимых примитивных групп, порожденных отражениями, над полем характеристики 0. Мы сохраняем для этих групп обозначения, принятые в (3). Предположение $n > 3$ обусловлено тем фактом, что для $n=2$ и $n=3$ имеется полная классификация линейных групп над конечным полем (7, 8).

Доказательство основной теоремы распадается естественным образом на две части в зависимости от того, имеется или нет в группе G пара отражений x, y с $|x \cdot y| > 5$ (здесь $|g|$ — порядок элемента $g \in G$).

Положим

$$d(G) = \max\{|x \cdot y|, x, y \in T\},$$

где T — множество всех отражений, содержащихся в группе G .

Определение 3. Линейная группа $G \subset GL(V)$ называется r -мерной, если пространство V можно представить в виде прямой суммы неприводимого G -модуля размерности r и тривиального G -модуля размерности $n-r$.

Важным моментом доказательства является следующее

Предложение. Пусть $G \subset GL(V)$ — неприводимая примитивная группа отражений, $n > 2$, $d(G) \geq 5$.

Тогда группа G содержит 3-мерную примитивную подгруппу H такую, что

$$d(H) = d(G).$$

Из классификации 3-мерных линейных групп над конечными полями (см. (7, 8)) вытекает, что если K — конечное поле характеристики $p > 5$, $n=3$ и $G \subset GL(V)$ — неприводимая примитивная группа отражений с $d(G) > 5$, то с точностью до сопряженности в $GL(V)$ группа G совпадает с ортогональной группой $O_3(k)$, где k — подполе поля K . Поэтому классификация неприводимых примитивных групп отражений G с $d(G) > 5$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Пусть $G \subset GL(n, K)$ — неприводимая группа отражений, $n > 2$, $\text{char}(K) = p > 5$. Если группа G содержит 3-мерную ортогональную группу $\text{diag}(O_3(k), 1, \dots, 1)$, то, с точностью до сопряженности в $GL(n, K)$, группа G совпадает с одной из ортогональных групп $O_{2m+1}(F)$, $O_{2m}^*(F)$, где F — некоторое подполе, $k \subseteq F \subseteq K$, $n = 2m+1$, $n = 2m$ соответственно.

При классификации групп отражений с $d(G) \leq 5$ вводятся понятия системы корней в векторном пространстве V над полем K характеристики $p \neq 2$, вектор-графа, корневого графа. Затем находятся системы корней и корневые графы для случая $n = \dim V = 3$. Дальнейший ход доказательства использует некоторые утверждения из (6), а также ряд вспомогательных утверждений относительно существования определенных типов вектор-графов.

Автор выражает свою признательность А. Е. Залесскому за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
4 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. S. M. Coxeter, Ann. Math., v. 35, № 3, 588 (1934).
- ² G. C. Shephard, J. A. Todd, Canad. J. Math., v. 6, № 2, 274 (1954).
- ³ A. M. Cohen, Finite Complex Reflection Groups, Diss., Rijksuniversiteit, Utrecht, 1975.
- ⁴ Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, М., «Мир», 1972.
- ⁵ Коуровская тетрадь, Новосибирск, 1973.
- ⁶ А. Е. Залесский, В. Н. Сережкин, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 39, № 6 (1975).
- ⁷ H. H. Mitchell, Trans. Am. Math. Soc., v. 12, 207 (1914).
- ⁸ W. Feit, Intern. Congrès des Mathématiciens, Nice, 1970, Actes, v. 1, Paris, 1971, p. 55.
- ⁹ H. H. Mitchell, Am. J. Math., v. 36, 1 (1914).