

УДК 519.53

МАТЕМАТИКА

В. А. РОМАНОВ

О НЕПРЕРЫВНЫХ И ВПОЛНЕ РАЗРЫВНЫХ МЕРАХ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 XI 1975)

Вводятся понятия непрерывной и вполне разрывной мер в линейном пространстве X , зависящие от фиксированного линейного подпространства H . Доказывается возможность однозначного разложения произвольной меры в сумму непрерывной и вполне разрывной мер. В случае $X=H=R^n$ это разложение совпадает с разложением в смысле Лебега по инвариантной лебеговой мере. В произвольном случае оно не сводится к разложению в смысле Лебега по какой-нибудь фиксированной мере. Рассматриваются свойства непрерывных и вполне разрывных мер.

Пусть H — линейное подпространство пространства X . Под мерами будут пониматься конечные неотрицательные счетно аддитивные функции множества, заданные на некоторой σ -алгебре Σ подмножеств пространства X , инвариантной относительно сдвигов на векторы из H .

Определение 1. Пусть h — вектор из H . Мера t называется непрерывной по направлению h , если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|m_{th} - m\| = 0 \quad (1)$$

(здесь $\|\cdot\|$ означает вариацию, а m_x — сдвиг меры m на вектор x).

Если (1) выполнено для всех h из H , то t называется H -непрерывной.

Определение 2. Мера t называется вполне H -разрывной, если не существует такой ненулевой H -непрерывной меры λ , что $\lambda \leq t$. (Для удобства дальнейших формулировок мы относим к вполне H -разрывным мерам нулевую меру. Заметим, что только она одновременно H -непрерывна и вполне H -разрывна.)

Теорема 1. Пусть t — мера, определенная на σ -алгебре Σ подмножеств линейного пространства X , инвариантной относительно сдвигов на векторы из линейного подпространства H .

Тогда существует такая H -непрерывная мера t_1 и такая вполне H -разрывная мера t_2 , что $t_1 + t_2 = t$. Меры t_1 и t_2 определены однозначно.

Для доказательства существования такого разложения достаточно заметить, что в качестве меры t_1 можно взять

$$t_1 = \sup_{\lambda \in M} \lambda,$$

где M — множество всех H -непрерывных мер, не превосходящих t . Единственность непосредственно вытекает из определений 1 и 2.

Если $X=H=R^n$, а Σ есть σ -алгебра лебеговых подмножеств пространства R^n , то H -непрерывность меры эквивалентна ее абсолютной непрерывности относительно меры Лебега в R^n , а вполне H -разрывность меры — ее сингулярности относительно меры Лебега. В этом случае результат теоремы 1 приводит к разложению в смысле Лебега по инвариантной лебеговой мере.

В дальнейшем X — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, Σ — σ -алгебра борелевских подмножеств пространства X .

Если $H=X$, то условие H -непрерывности в этом случае оказывается настолько ограничительным, что множество H -непрерывных мер состоит только из нулевой меры. Это вытекает из результатов § 5 работы (1).

Заметим, что для случая, когда H всюду плотно в X , нетривиальные примеры H -непрерывных мер в X существуют. Например, если $H=B(X)$, где B — некоторый положительно определенный оператор Гильберта — Шмидта, то из теоремы 5.4.1 работы ⁽¹⁾ следует, что для любой непрерывной вещественной функции f на X , не равной тождественно нулю, найдется такая H -непрерывная мера m , что $\int f dm \neq 0$.

Теорема 2. Пусть λ, m — меры, заданные на σ -алгебре борелевских подмножеств пространства X , H — некоторое линейное подпространство в X , мера λ абсолютно непрерывна относительно меры m .

Тогда H -непрерывность меры m влечет H -непрерывность меры λ , а вполне H -разрывность меры m влечет вполне H -разрывность λ .

Очевидно, что сумма двух H -непрерывных мер H -непрерывна. Можно также показать, что сумма двух вполне H -разрывных мер вполне H -разрывна.

Теорема 3. Пусть H — линейное подпространство пространства X .

Тогда каждая вполне H -разрывная мера m сингулярна относительно любой H -непрерывной меры λ .

Будем считать, что линейное подпространство H таково, что множество ненулевых H -непрерывных мер непусто.

Теорема 3 позволяет отметить следующее сходство между разложением меры в пространстве R^n в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной относительно n -мерной меры Лебега мер и разложением меры в пространстве X в сумму H -непрерывной и вполне H -разрывной мер: в обоих случаях получается сумма двух взаимно сингулярных мер. Напрашивается вопрос: не совпадает ли указанное разложение меры в пространстве X с разложением в смысле Лебега по какой-нибудь фиксированной мере в этом пространстве?

Отрицательный ответ на этот вопрос следует из теоремы 4.

Теорема 4. Пусть H — такое линейное подпространство бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства X , что множество ненулевых H -непрерывных мер непусто.

Тогда в пространстве X не существует такой меры m , относительно которой все H -непрерывные меры абсолютно непрерывны.

Доказательство. Пусть такая мера m существует. Пользуясь теоремой 3, нетрудно установить, что тогда все H -непрерывные меры абсолютно непрерывны относительно H -непрерывной компоненты меры m . Поэтому можно считать, что мера m H -непрерывна. В силу свойства регулярности, которым обладает мера в X , существует σ -компакт (счетное объединение компактов), являющийся носителем меры m . Поскольку линейная оболочка M этого σ -компакта сама есть σ -компакт, то $M \neq X$. Пусть $x \in X \setminus M$. Мера m_x H -непрерывна, но не абсолютно непрерывна относительно m , что противоречит сделанному предположению.

Теорема 5. Если m — H -непрерывная мера в пространстве X , то для H -непрерывности ее пополнения необходимо и достаточно, чтобы исходная мера была квазиинвариантна по подпространству H (т. е. чтобы запас нуль-множеств меры m был инвариантен относительно сдвигов на векторы из H).

Теорема 6. Для того чтобы мера m в пространстве X была H -непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора h из H все конечномерные проекции $\psi(t)$ меры m были непрерывны по направлению $\psi(h)$ равномерно относительно ψ .

Автор благодарит Е. В. Майкова и с глубокой благодарностью вспоминает С. В. Фомина, под руководством которых была написана эта статья.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 X 1975.

ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 24, 133 (1971).