

А. М. РЕВЯКИН

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ В КАТЕГОРИЯХ КОМБИНАТОРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 III 1976)

В работе вводится понятие слабого объединения комбинаторных геометрий (далее всюду: геометрий) относительно общей субгеометрии, которое является обобщением понятия сильного объединения геометрий, введенного Т. Брилавским ⁽¹⁾. Доказывается, что их существование является достаточным условием для существования конструкции инъективного универсального квадрата в категории геометрий и слабых отображений. Устанавливаются связи конструкции слабого объединения геометрий с конструкциями сильного объединения, универсального квадрата в категории геометрий и сильных отображений, расширений и наращений геометрий.

Предгеометрией (или матроидом) G называется конечное множество $\{G\}$ с оператором замыкания $J_G(\dots)$, удовлетворяющим свойству замены: для любых точек $p, q \in \{G\}$ и для всякого подмножества $P \subseteq \{G\}$, если $p \in \overline{PU\{q\}}$, $p \notin \overline{P}$, то $q \in \overline{PU\{p\}}$. Предгеометрия называется геометрией, если пустое множество и все одноточечные подмножества замкнуты ⁽²⁾.

В определении предгеометрии G условие конечности множества $\{G\}$ можно заменить условием конечности базиса: для всякого $A \subseteq \{G\}$ существует конечное подмножество $A_f \subseteq A$ такое, что $\overline{A_f} = \overline{A}$ ⁽³⁾.

Замкнутые множества геометрии будем называть гиперплоскостями. Множество всех гиперплоскостей геометрии, упорядоченное по включению (в теоретико-множественном смысле), образует геометрическую структуру ⁽²⁾. С точки зрения общей теории структур она характеризуется как полная, конечная, полумодулярная, точечная структура ⁽⁴⁾. Рангом $r(A)$ множества $A \subseteq \{G\}$ называется длина максимальной цепи от $\overline{A}$ до нуля в структуре гиперплоскостей геометрии G . Множество $A \subseteq \{G\}$ является порождающим для G , если $\overline{A} = \{G\}$. Пусть $|A|$ — мощность множества A . Если $r(A) = |A|$, то A называется независимым. В противном случае $r(A) < |A|$ и A — зависимо. Независимое порождающее множество геометрии называется базисом.

Геометрия однозначно задается семейством всех своих независимых подмножеств ⁽⁵⁾. Семейство $\mathcal{K}$ подмножеств некоторого множества S является множеством всех независимых подмножеств некоторой предгеометрии, если выполнены следующие условия: 1.1) $\emptyset \in \mathcal{K}$; 1.2) если $K \in \mathcal{K}$ и $N \subseteq K$, то $N \in \mathcal{K}$; 1.3) если $K, N \in \mathcal{K}$ и $|N| = |K| + 1$, то в N найдется элемент $x \notin K$, такой, что $K \cup \{x\} \in \mathcal{K}$. Кроме того, в случае бесконечного S , если $A \subseteq S$ и для всех конечных подмножеств $A' \subseteq A$ выполнено $A' \in \mathcal{K}$, то $A \in \mathcal{K}$.

Сильным (соответственно слабым) отображением геометрии G в геометрию H называется такая инъективная функция $f: \{G\} \cup 0 \rightarrow \{H\} \cup 0$ (где 0 — пустое множество), что $f(0) = 0$ и прообраз любого замкнутого (соответственно независимого) множества из H замкнут (соответственно независим) в G . Каждое сильное отображение является слабым, но обратное неверно.

Геометрии и сильные (соответственно слабые) отображения образуют категорию $\mathcal{F}_s$ (соответственно $\mathcal{F}_w$) ^(1, 5).

Пусть $p \in \{G\}$ и пусть $\bar{A}$ — замыкание A в G . Тогда предгеометрию на множестве $\{G\} \setminus \{p\}$ с оператором замыкания $J(A) = \{\bar{A}\} \setminus \{p\}$, определенным для всех подмножеств $A \subseteq \{G\} \setminus \{p\}$, назовем исключением и обозначим через $G - p$. Субгеометрия $G - D$, где $D \subseteq \{G\}$, определяется как последовательность исключений точек D .

Инъективным кодекартовым (универсальным) квадратом Q геометрий G и H относительно x в категории геометрий и отображений называется копредел диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \epsilon \\ & \nearrow \alpha & \\ x & & \\ & \searrow \beta & \\ & & H \end{array} \quad (1)$$

где α, β — мономорфизмы неубывающего ранга ⁽¹⁾.

Квадрат

$$\begin{array}{ccccccc} & & G & & \mu & & \\ & \nearrow \alpha & & \nearrow \delta & & & \\ x & & & & W & \xrightarrow{\lambda} & F \\ & \searrow \beta & & \searrow \gamma & & & \\ & & H & & \nu & & \end{array} \quad (2)$$

кодекартов тогда и только тогда, когда а) он коммутативен; б) для всякой пары морфизмов $\mu: G \rightarrow F, \nu: H \rightarrow F$ такой, что $\mu\alpha = \nu\beta$, существует единственный морфизм $\lambda: W \rightarrow F$, удовлетворяющий условиям $\mu = \lambda\delta, \nu = \lambda\gamma$.

Определение 1. Пусть G и H — геометрии с общей субгеометрией x . Слабым объединением W геометрий G и H относительно x назовем предгеометрию (если она существует) на множестве $\{G - x\} \cup \{H - x\} \cup \{x\}$ с семейством $\mathcal{K}$ всех независимых подмножеств таких, что $K \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $K \cap \{G\}$ независимо в G , $K \cap \{H\}$ независимо в H и $|K| \leq r(G) + r(H) - r(x)$.

Предложение 1. Если $W = W_x(G, H)$ — слабое объединение геометрий G и H относительно общей субгеометрии x , то его ранг равен $r(G) + r(H) - r(x)$.

Теорема 1. Пусть существует слабое объединение W геометрий G и H относительно общей субгеометрии x . Тогда $W = W_x(G, H)$ является инъективным универсальным квадратом в категории $\mathcal{F}_w$, и его ранг равен $r(G) + r(H) - r(x)$.

Доказательство. Пусть $W = W_x(G, H)$ — слабое объединение геометрий G и H относительно x , а F — произвольная геометрия такая, что слабые отображения $\mu: G \rightarrow F$ и $\nu: H \rightarrow F$ удовлетворяют условию $\mu\alpha = \nu\beta$. Построим отображение $\lambda: W \rightarrow F$ следующим образом: если $a \in \{G - x\}$, то $\lambda(a) = \mu(a)$; если $b \in \{H - x\}$, то $\lambda(b) = \nu(b)$; если $c \in \{x\}$, то $\lambda(c) = \mu\alpha(c) = \nu\beta(c)$. В силу коммутативности диаграммы построенное отображение является единственной инъективной функцией из $\{W\} \cup 0$ в $\{F\} \cup 0$ (где 0 — пустое множество), обладающей свойствами $\mu = \delta\lambda$ и $\nu = \gamma\lambda$. Покажем, что эта инъективная функция задает слабое отображение геометрии W в F . Проверим для этого, что прообраз любого независимого подмножества из F независим в W . Пусть B_x — базис в x . Так как x — общая субгеометрия G и H , достроим B_x до базисов B_G и B_H соответственно геометрий G и H . Тогда

$B_G \cup B_H$ порождает множество W . Отсюда следует, что $\lambda(B_G \cup B_H)$ порождает множество $\lambda(W)$. Выберем в $\{\lambda(B_G \cup B_H)\}$ порождающее независимое подмножество D . Так как $Q = F - (\{F\} \setminus \{\lambda(W)\})$ — геометрия, а D в ней является независимым порождающим множеством, то все независимые подмножества из $\lambda(W)$ по мощности не больше, чем D . Представим D как объединение $\lambda(A) \cup \lambda(B) \cup \lambda(C)$, где $A \equiv \{G-x\}$, $B \equiv \{H-x\}$, $C \equiv \{x\}$. Прообраз $\lambda(A) \cup \lambda(C)$ равен $A \cup C$, независим в G и по построению содержится в B_G . Аналогично, прообраз $\lambda(B) \cup \lambda(C)$ равен $B \cup C$, независим в H и содержится в B_H . Отсюда следует, что $A \cup B \cup C \subseteq B_G \cup B_H$. Значит, $|D| = |\lambda(A) \cup \lambda(B) \cup \lambda(C)| = |A \cup B \cup C| \leq |B_G \cup B_H| = |B_G| + |B_H| - |B_G \cap B_H| = r(G) + r(H) - r(x)$, т. е. $|D| \leq r(G) + r(H) - r(x)$. Тем самым установлено, что мощность всякого независимого подмножества из $\lambda(W)$ не больше, чем $r(G) + r(H) - r(x)$. Пусть E — произвольное независимое подмножество из $\lambda(W)$. Представим его как объединение $\lambda(A) \cup \lambda(B) \cup \lambda(C)$, где $\lambda(A) \subseteq \lambda(G-x)$, $\lambda(B) \subseteq \lambda(H-x)$, $\lambda(C) \subseteq \lambda(x)$. Прообраз E равен $A \cup B \cup C$ и является независимым в W , так как $A \cup C$ — независимо в G , $B \cup C$ — независимо в H и $|A \cup B \cup C| \leq r(G) + r(H) - r(x)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Часто в литературе слабым отображением геометрии G в геометрию H называют такую функцию $f: \{G\} \cup 0 \rightarrow \{H\} \cup 0$ (где 0 — пустое множество), что $f(0) = 0$ и все взаимнооднозначные прообразы независимых подмножеств из H независимы в G . Под взаимнооднозначным прообразом множества B подразумевается такое подмножество A прообраза множества B , что функция $f: A \rightarrow B$ биективна. Нетрудно проверить, что утверждения, доказанные выше, справедливы и при таком определении слабого отображения.

Пусть G_1 и G_2 — две геометрии соответственно на множествах X_1 и X_2 , причем $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Образует геометрию $G_1 \oplus G_2$ на множестве $X_1 \cup X_2$, независимыми множествами которой будут только элементы семейства $\mathcal{H}_{G_1 \oplus G_2} = \{K_1 \cup K_2: K_1 \in \mathcal{H}_{G_1}, K_2 \in \mathcal{H}_{G_2}\}$. Геометрия $G_1 \oplus G_2$ называется прямой суммой геометрий G_1 и G_2 . Если $G = G_1 \oplus G_2$, то G_1 и G_2 называются сепараторами, а G — сепарируемой.

Теорема 2. Пусть x является одновременно сепаратором геометрии G и субгеометрией геометрии H . Тогда существует слабое объединение $W = W_x(G, H)$ геометрий G и H относительно x .

Доказательство теоремы 2 заключается в прямой проверке того, что семейство независимых подмножеств $\mathcal{H}$ из определения 1 удовлетворяет аксиомам 1.1)–1.3) и поэтому задает геометрию.

В геометрии G две гиперплоскости x и y образуют модулярную пару $M(x, y)$, если $r(x) + r(y) = r(x \wedge y) + r(x \vee y)$, где r — функция ранга соответствующей геометрической структуры. Гиперплоскость x является модулярной, если она образует модулярную пару $M(x, y)$ с каждой гиперплоскостью y из G . Примерами модулярных гиперплоскостей геометрии являются G , пустое множество, все точки и все сепараторы. В самом деле, сепараторы есть дистрибутивные гиперплоскости, так как они удовлетворяют дистрибутивному закону $(u \vee y) \wedge x = (u \wedge x) \vee (y \wedge x)$ для всех гиперплоскостей u , в то время как модулярная гиперплоскость удовлетворяет этому условию для всех $u \leq x$ ⁽⁴⁾.

Предложение 2. Если x — модулярная субгеометрия геометрии G и субгеометрия геометрии H , то существует слабое объединение W геометрий G и H относительно x .

Следует отметить, что условия теорем 1, 2 и предложения 2 являются достаточными. Обратные к ним утверждения в общем случае неверны. Кроме того, инъективный универсальный квадрат в $\mathcal{F}_w$ так же, как и в $\mathcal{F}_s$, не всегда существует ⁽⁴⁾.

Условия, аналогичные условиям предложения 2 (также достаточные), получены в ⁽⁴⁾ для существования сильного объединения P геометрий G и H относительно общей субгеометрии x .

Сильным объединением P геометрий G и H относительно общей суб-

геометрии x называется геометрия на множестве $\{G-x\} \cup \{H-x\} \cup \{x\}$ с гиперплоскостями M , такими, что $M \cap \{G\}$ замкнуто в G , а $M \cap \{H\}$ замкнуто в H , если выше описанные гиперплоскости образуют замкнутую геометрическую структуру.

Сильное объединение $P = P_x(G, H)$, если оно существует, всегда является инъективным универсальным квадратом в $\mathcal{F}_s$ ⁽¹⁾.

Если $x = \phi$, то инъективные универсальные квадраты в $\mathcal{F}_s$ и в $\mathcal{F}_w$ совпадают и являются прямой суммой геометрий ⁽²⁾. Случай, когда x — точка, рассмотрен в ⁽⁶⁾.

Предложение 3. Пусть существует инъективный универсальный квадрат P геометрий G и H относительно общей субгеометрии x в $\mathcal{F}_s$ и слабое объединение $W = W_x(G, H)$. Тогда $P = W_x(G, H)$.

Бывают случаи, когда не существует сильного объединения $P_x(G, H)$, хотя существуют инъективный универсальный квадрат в $\mathcal{F}_s$ и слабое объединение $W = W_x(G, H)$. Например, x — линия ab ; G — линия abc ; H — линия abd ; W — линия $abcd$.

Одноточечным расширением геометрии G точкой p ⁽⁷⁾ называется такая геометрия G' , что $r(G') = r(G)$ и $G = G' - p$. Более общее: расширением геометрии G называется последовательность одноточечных расширений (т. е. геометрия, содержащая G как порождающую субгеометрию).

Предложение 4. Пусть x — модулярная гиперплоскость (соответственно сепаратор) геометрии G и x' — расширение x . Тогда $G' = W_x(G, x')$ является единственным расширением G таким, что x' — модулярная гиперплоскость (соответственно сепаратор) G' и $G' - \{x' - x\} = G$.

Пусть H — геометрия ранга $r+1 > 1$. Тогда гиперплоскости геометрии H , ранг которых отличен от r , образуют геометрическую структуру, называемую структурой усечения геометрии H . Если G изоморфна усечению геометрии H , то скажем, что H есть наращение геометрии G . Все наращения геометрии G , упорядоченные как антицепи булевой алгебры, образуют структуру. Наименьший ее элемент называется свободным наращением геометрии.

Предложение 5. Пусть R — расширение геометрии G посредством $x' - x$. Тогда, если R не является свободным наращением своего усечения, то $R \neq W_x(G, x')$, где x' — расширение x .

Предложение 6. Если существует инъективный универсальный квадрат в $\mathcal{F}_s$ (или $\mathcal{F}_w$), то он является упрежденной геометрией (т. е. не может быть наращен ⁽⁸⁾).

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. К. А. Рыбникову за внимание, проявленное к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Brylawski, Trans. Amer. Math. Soc., v. 203, 1 (1975). ² H. H. Crapo, G. C. Rota, Stud. Appl. Mat., v. 49, 109 (1970). ³ К. А. Рыбников, Введение в комбинаторный анализ, М., Изд-во МГУ, 1972. ⁴ Г. Биркгоф, Теория структур, М., ИЛ, 1952. ⁵ D. Lucas, Trans. Amer. Math. Soc., v. 206, 247 (1975). ⁶ T. Brylawski, Trans. Amer. Math. Soc., v. 154, 1 (1971). ⁷ А. М. Ревякин, Комбинаторный анализ, № 4, 64 (1976). ⁸ H. H. Crapo, Ann. New York Acad. Sci., v. 175, 89 (1970).