

А. А. РУБАН

ЭНТРОПИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННОГО С АЛГОРИТМОМ ПЕРРОНА ДЛЯ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 7 XI 1975)

В предлагаемой работе терминология и обозначения приняты в основном такими же, как в (1). Приведем сначала необходимые определения.

Обозначим через X множество p -адических чисел вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i p^i$, а через Y — множество p -адических чисел вида $\sum_{i=-m}^0 c_i p^i$, $c_i = 0, 1, 2, \dots, p-1$. Для p -адического числа $z = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i p^i$ положим

$$[z] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p^i, \quad \{z\} = \sum_{i=-m}^0 c_i p^i.$$

$[z]$ называется целой частью, а $\{z\}$ — дробной частью p -адического числа z . Если $z = \sum_{i=k}^{\infty} c_i p^i$, $c_k \neq 0$, то, по определению, $|z| = p^{-k}$. Через P обозначается мера Хаара на X^n , нормированная условием $P(X^n) = 1$. Через $\tilde{X}^n$ обозначим подмножество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ таких, что система p -адических чисел $x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ рационально независима. Очевидно, $P(\tilde{X}^n) = 1$. Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \tilde{X}^n$, то можно определить для каждого натурального значения i систему дробных p -адических чисел $a_1^i(x), a_2^i(x), \dots, a_n^i(x)$. Для этого положим сначала

$$a_1^1(x) = \left\{ \frac{x_2}{x_1} \right\}, \quad a_2^1(x) = \left\{ \frac{x_3}{x_1} \right\}, \dots, a_{n-1}^1(x) = \left\{ \frac{x_n}{x_1} \right\}, \quad a_n^1(x) = \left\{ \frac{1}{x_1} \right\},$$

$$T_n(x) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left\{ \frac{x_2}{x_1} \right\}, \frac{x_3}{x_1} - \left\{ \frac{x_3}{x_1} \right\}, \dots, \frac{x_n}{x_1} - \left\{ \frac{x_n}{x_1} \right\}, \frac{1}{x_1} - \left\{ \frac{1}{x_1} \right\} \right) = \\ = \left(\left[\frac{x_2}{x_1} \right], \left[\frac{x_3}{x_1} \right], \dots, \left[\frac{x_n}{x_1} \right], \left[\frac{1}{x_1} \right] \right).$$

На $\tilde{X}^n$ определено не только преобразование T_n , но и преобразования $T_n^2, T_n^3, \dots$. При $n=1$ получаем преобразование множества в себя, связанное с непрерывными дробями: $T(x) = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} \right\}$. Иными словами,

$$\frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{\ddots}}}} \xrightarrow{T} \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Положим, далее,

$$a_k^{i+1}(x) = a_k^i(T_n^i(x)), \quad k=1, 2, \dots, n; \quad i=1, 2, \dots$$

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & \dots & r_{1, n+1}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n+1, 1}^k & \dots & r_{n+1, n+1}^k \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E & \begin{smallmatrix} a_1^i \\ \vdots \\ a_n^i \end{smallmatrix} \end{pmatrix};$$

здесь E — единичная матрица порядка n . Известно ⁽¹⁾, что

$$x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{i, n+1}^k / r_{n+1, n+1}^k, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y^n$. Набор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется допустимым, если $|a_i| < |a_n|$, $i=1, 2, \dots, n-1$, $|a_n| > 1$. Для допустимого набора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y^n$ полагаем

$$w(a) = P\{x: a_1^1(x) = a_1, a_2^1(x) = a_2, \dots, a_n^1(x) = a_n\}.$$

В настоящей работе вычисляется энтропия $H(T_n)$ преобразования T_n множества X^n в себя (правильнее было бы говорить, разумеется, о множестве $\tilde{X}^n$), тесно связанного с алгоритмом Перрона для p -адических чисел, т. е. многомерными p -адическими непрерывными дробями.

Из матричного равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & x_1 \\ \dots & x_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & x_n \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & a_1 + x_1 \\ \dots & a_2 + x_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & a_n + x_n \end{pmatrix}$$

путем вычислений, аналогичных тем, которые использованы в ⁽²⁾, можно получить доказательство следующего утверждения, которое необходимо для вычисления величины $H(T_n)$.

Теорема 1. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y^n$ — допустимый набор, причем $|a_n| = p^r$ (разумеется, $r \geq 1$).

Тогда $w(a) = p^{-r(n+1)}$.

Поскольку, как показано в ⁽²⁾, преобразование T_n сохраняет меру Хаара на X^n , из общих теорем теории преобразований с инвариантной мерой (в удобной для наших целей форме нужные результаты можно найти, например, в ⁽⁴⁾) вытекает, так же как в вещественном случае (см., например, ⁽³⁾, теорема 2; или ⁽⁶⁾ § 7), что справедлива

Теорема 2.

$$H(T_n) = - \sum w(a) \log_p w(a),$$

где суммирование производится по всем допустимым наборам $a \in Y^n$.

Здесь и ниже для удобства вычислений логарифмы берутся по основанию p .

Теорема 3. $H(T_n) = (n+1)p/(p-1)$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in Y^n$ — допустимый набор, причем $|a_n| = p^r$. Тогда a_n может принять ровно $(p-1)p^r$ различных значений, и поэтому всего имеется $(p-1)p^{rn}$ таких (т. е. удовлетворяющих условию $|a_n| = p^r$) допустимых наборов. Воспользовавшись теоремами 1

и 2, получим

$$\begin{aligned} H(T_n) &= - \sum_{r=1}^{\infty} (p-1) p^{rn} p^{-r(n+1)} \log_p p^{-r(n+1)} = (p-1) (n+1) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{p^r} = \\ &= (p-1) (n+1) \frac{p}{(p-1)^2} = \frac{(n+1)p}{p-1}. \end{aligned}$$

Полагая в теореме 3 $n=1$, получим энтропию преобразования T пространства X в себя, изучавшегося в (3). Преобразование T определялось там следующим образом: $T(x) = 1/x - \{1/x\}$ для $x \in X$. Таким образом, по теореме 3, $H(T) = 2p/(p-1)$.

Положим для удобства, как в (1), $r_{ij}^k = A_i^{k+j-1}$. Теперь теоремы 3 и 4 из (2) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. Для почти всех $x \in X^n$ (относительно меры P на X^n)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^h |a_n^i(x)| \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow \infty} |A_i^h(x)|^{1/h} = p^{H(T_n)/(p+1)}.$$

В случае вещественных чисел имеется аналогичное соотношение (5, 6), связывающее значение соответствующих пределов с энтропией. Однако в случае вещественных чисел точное выражение для энтропии (так же как и точное значение пределов величин, аналогичных тем, которые фигурируют в теореме 4) неизвестно при $n > 1$. Приведем здесь их значения при $n=1$:

$$H = \pi^2/6 \ln^2 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n)^{1/n} = \exp(\pi^2/12 \ln 2);$$

здесь q_n — знаменатель n -й подходящей дроби.

В заключение пользуюсь возможностью выразить благодарность за полезные обсуждения И. А. Ибрагимову, А. Г. Постникову и В. А. Рохлину, а также Ф. Швайгеру, любезно приславшему мне свою книгу (6).

Центральный научно-исследовательский институт
научно-технической информации и
технико-экономических исследований
Москва

Поступило
22 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Рубан, ДАН, т. 204, № 1, 45 (1972). ² А. А. Рубан, ДАН, т. 213, № 3, 536 (1973). ³ А. А. Рубан, Сибирск. матем. журн., т. 11, № 1, 222 (1970). ⁴ В. А. Рохлин, УМН, т. 22, № 5, 3 (1967). ⁵ F. Schweiger, J. reine u. angew. Math., B. 229, 50 (1968). ⁶ F. Schweiger, The Metrical Theory of Jacobi-Perron Algorithm. Lecture Notes in Math., v. 334, Berlin, 1973.