

И. М. СПИТКОВСКИЙ

ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ ИЗМЕРИМЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 19 XI 1975)

Обозначения. Z — совокупность конечного числа замкнутых непересекающихся ляпуновских кривых, ограничивающих m -связную область $D^+(\equiv 0)$; D^- — дополнение $D^+ \cup Z$ до полной плоскости; $E_p^\pm(Z)$ ($=E_p^\pm$) — классы Смирнова ⁽¹⁾ функций, определенных в D^+ и D^- соответственно; C — класс непрерывных на Z функций; R — множество рациональных функций из C ; $M_p^\pm$ — линейная сумма класса $E_p^\pm$ с R ; L_p — банахово пространство заданных на Z измеримых функций, суммируемых со степенью $p(\geq 1)$; $L_p^{(n)}$ — пространство n -мерных вектор-функций с компонентами из L_p , норма в котором определяется формулой $\|x\| = \|(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}\|_{L_p}$; $P_\pm$ — проекторы, связанные с оператором сингулярного интегрирования S соотношением $P_\pm = 1/2(I \pm S)$.

Для рассматриваемых в работе n -мерных матриц-функций (м.ф.) принадлежность некоторому из перечисленных выше классов функций понимается поэлементно.

Определение 1. Факторизацией м.ф. G в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, будем называть ее представление в виде

$$G(t) = G_+(t) \Lambda(t) G_-^{-1}(t), \quad t \in Z, \quad (1)$$

где $G_\pm \in E_p^\pm$; $G_\pm^{-1} \in E_q^\pm$, $q = p/(p-1)$; $\Lambda(t) = (\delta_{ij} t^{k_j})$, $i, j=1, n$. Целые числа $k_1 \geq \dots \geq k_n$ однозначно определяются параметром p и называются частными индексами м.ф. G , а их сумма k — суммарным индексом.

Определение 2. Факторизация (1) называется Φ -факторизацией, если оператор $K = G_- P_- G_+^{-1}$ ограничен в пространстве $L_p^{(n)}$.

В настоящей работе исследуется поведение факторизации (Φ -факторизации) заданной м.ф. при изменении параметра p . Получен критерий Φ -факторизуемости в пространстве L_2 . В случае, когда контур — окружность, указаны необходимые и достаточные условия существования Φ -факторизации в L_2 с неотрицательным (неположительным, устойчивым) набором частных индексов.

1. Всякая непрерывная невырожденная м.ф. допускает факторизацию, которая автоматически является ее Φ -факторизацией во всех пространствах L_p , $1 < p < \infty$ ⁽²⁾. Для описания картины, возникающей в более общем случае, целесообразно ввести

Определение 3. Областью факторизуемости (Φ -факторизуемости) м.ф. G назовем множество $F(G)$ ($\Phi(G)$) таких значений $p \in (1, \infty)$, при которых G допускает факторизацию (Φ -факторизацию) в пространстве L_p .

Для непустоты $F(G)$ необходимо, чтобы $G^{\pm 1} \in L_1$. Если $G \in L_\infty$ и $\Phi(G)$ непусто, то $G^{-1} \in L_\infty$ ⁽³⁾.

Теорема 1. Множество $F(G)$ есть объединение непересекающихся связных (возможно, пустых) подмножеств $F_k(G) = \{p: \text{м.ф. } G \text{ допускает факторизацию в } L_p \text{ с суммарным индексом } k\}$. Если $k < l$, то множество $F_k(G)$ расположено на вещественной оси правее, чем $F_l(G)$. Если $p_0 \in$

$\in F_k(G)$, то факторизация м.ф. G в пространстве L_{p_0} является одновременно ее факторизацией во всех L_p , $p \in F_k(G)$. Частные индексы м.ф. G , рассматриваемые как функции от p , определены и не возрастают на $F(G)$ и постоянны на каждой из компонент $F_k(G)$.

Аналогичный результат имеет место для $\Phi(G)$. При этом, очевидно, $\Phi_k(G) \subset F_k(G)$.

Используя функции со счетным числом разрывов первого рода, можно построить примеры м.ф., для которых непусто бесконечное число компонент $\Phi_k(G)$.

Теорема 2. Для м.ф. $G \in E_1^-$ $p \in F(G)$ тогда и только тогда, когда $G \in L_q$, $q = p/(p-1)$, а $G^{-1} \in M_p^-$; $p \in \Phi(G)$ тогда и только тогда, когда $G \in L_q$, а $G^{-1} \in M_\infty^-$. При этом все частные индексы неположительны, а суммарный индекс противоположен числу нулей $\det G$, лежащих в D^- .

Следствие 1. Для м.ф. $G \in M_1^-$ множество $F(G)$ ($\Phi(G)$) либо пусто, либо состоит из одной компоненты. Роль последней для $F(G)$ может играть любое связанное подмножество $(1, \infty)$, для $\Phi(G)$ — либо луч вида (p, ∞) , либо $[p, \infty)$.

Следствие 2. Существует м.ф. G такая, что $G^{\pm 1} \in L_\infty$, но $F(G)$ пусто. Существует м.ф. $G \in L_\infty$, для которой $F(G) = (1, \infty)$, а $\Phi(G)$ пусто.

В дальнейшем используется связь между Φ -факторизуемостью м.ф. $G \in L_\infty$ и нётеровостью оператора $P_+ + GP_-$ ⁽³⁾.

Следствие 3. Пусть $G \in E_\infty^- + C$. Условие $G^{-1} \in E_\infty^- + C$ необходимо для непустоты $\Phi(G)$ и достаточно для того, чтобы $\Phi(G)$ состояло из единственной компоненты $\Phi_k(G)$, заполняющей весь луч $(1, \infty)$.

Достаточность. Если $G^{-1} \in E_\infty^- + C$, то оператор $P_+ + C^{-1}P_-$ является двусторонним регуляризатором для $P_+ + GP_-$. В доказательстве не обходятся и мо с ти существенную роль играет теорема 2.

Аналогичные результаты можно сформулировать для м.ф. из классов Смирнова в области D^+ . Φ -факторизуемость м.ф. из $E_\infty^+ + C$ в пространстве L_2 на окружности исследована в ⁽⁴⁾.

2. Рассмотрим задачу факторизации на единичной окружности Γ . Заметим предварительно, что $E_p^\pm(\Gamma)$ суть классы Харди $H_p^\pm$, а норма оператора умножения на м.ф. $G \in L_\infty$ в пространстве $L_p^{(n)}$ вычисляется по формуле $\|G\| = \text{ess sup } \|G(t)\|$ ^{*}.

Теорема 3. Пусть N — заданная на Γ положительно определенная м.ф. Если $N \in L_{p_1}$, $N^{-1} \in L_{p_2}$, $p_{1,2} \geq 1$, то имеет место представление $N = AA^*$, где $A \in H_{2p_1}^+$, $A^{-1} \in H_{2p_2}^+$.

Доказательство при $p_{1,2} = \infty$ базируется на обратимости оператора $P_+ + NP_-$. В общем случае применяется теорема о факторизации спектральной плотности линейно регулярного стационарного процесса ⁽⁵⁾.

Следствие. Для заданной на Γ положительно определенной м.ф. N условие $N^{\pm 1} \in L_1$ равносильно непустоте $F(N)$, а условие $N^{-1} \in L_\infty$ достаточно для непустоты $\Phi(N)$.

Теорема 4. Для м.ф. $G \in L_\infty$ равносильны утверждения:

- 1) $2 \in \Phi(G)$ и все частные индексы неотрицательны;
- 2) существует м.ф. $X_- \in H_\infty^-$ такая, что $X_-^{-1} \in M_\infty^-$ и

$$\|I - GX_-\| < 1; \quad (2)$$

- 3) $G^{-1} \in L_\infty$ и существует м.ф. $X_+ \in H_\infty^+$ такая, что $X_+^{-1} \in M_\infty^+$ и $\|I - G^{-1}X_+\| < 1$.

При этом суммарный индекс м.ф. G совпадает с числом нулей $\det X_-$ вне единичного круга и с числом нулей $\det X_+$ внутри его.

Докажем эквивалентность утверждения 1) и 2). Для $X_- \in H_\infty^-$ имеет место равенство

$$P_+ + GX_-P_- = (P_+ + GP_-)(P_+ + X_-P_-). \quad (3)$$

* Под нормой матрицы понимается квадратный корень из наибольшего собственного числа ее произведения на сопряженную.

Условие 2) обеспечивает обратимость оператора $P_+ + GX_-P_-$ и по теореме 2, нётеровость $P_+ + X_-P_-$. Из равенства (3) тогда вытекает нётеровость и обратимость справа оператора $P_+ + GP_-$. Следовательно, 2) влечет 1).

Если выполнено 1), то $G^{-1} \in L_\infty$, и по теореме 3 $G^*G = A^*A$, где $A^{\pm 1} \in H_\infty^\pm$. М.ф. $U = GA^{-1}$ унитарнозначна и допускает Ф-факторизацию в L_2 с неотрицательными частными индексами. Следовательно, оператор $P_+ + UP_-$ обратим справа, и потому ^(6, 7) существует м.ф. $X \in H_\infty^+$ такая, что $\|U - X\| < 1$. Для $X_- = A^{-1}X^*$ выполняется неравенство (2).

Наконец, если м.ф. G Ф-факторизуема в L_2 , а $X_- \in H_\infty^-$ удовлетворяет неравенству (2), то, в силу равенства (3), оператор $P_+ + X_-P_-$ нётеров. По теореме 2, $X_-^{-1} \in M_\infty^-$.

Следствие. Если для $G \in C$ и $X_- \in M_\infty^-$ имеет место неравенство (2), то $X_-^{-1} \in M_\infty^-$.

Теорема 5. Для м.ф. $G \in L_\infty$ равносильны утверждения:

- 1) $2 \in \Phi(G)$ и все частные индексы неположительны;
- 2) существует м.ф. $X_+ \in H_\infty^+$ такая, что $X_+^{-1} \in M_\infty^+$ и $\|I - X_+G\| < 1$;
- 3) $G^{-1} \in L_\infty$ и существует м.ф. $X_- \in H_\infty^-$ такая, что $X_-^{-1} \in M_\infty^-$ и $\|I - X_-G^{-1}\| < 1$.

Заменив в формулировках теорем 4 и 5 классы $M_\infty^\pm$ на $H_\infty^\pm$, мы получим ряд необходимых и достаточных условий существования Ф-факторизации в L_2 с пулевыми частными индексами. Близкие результаты приведены в ^(6, 8).

Исходя из теорем 4 и 5, можно также вывести необходимые и достаточные условия того, что м.ф. $G \in L_\infty$ Ф-факторизуема в L_2 , а ее частные индексы заключены в заданных пределах. Остановимся на случае, когда содержащий частные индексы промежуток имеет длину 1, иначе говоря, когда набор частных индексов устойчив.

Теорема 6. М.ф. $G \in L_\infty$ допускает Ф-факторизацию в L_2 с устойчивым набором частных индексов тогда и только тогда, когда при некотором целом k существуют м.ф. $X_\pm \in H_\infty^\pm$ такие, что $X_\pm^{-1} \in M_\infty^\pm$; $\|I - t^k GX_-\| < 1$; $\|I - t^{k-1} X_+G\| < 1$.

Заметим, что если м.ф. G лежит в некоторой распадающейся R -алгебре $\mathcal{C}$ ⁽⁹⁾, то в формулировках теорем 4–6 можно условия $X_\pm \in H_\infty^\pm$ заменить на $X_\pm \in \mathcal{C}^\pm (= \mathcal{C} \cap H_\infty^\pm)$, а ограничения на $X_\pm^{-1}$ опустить.

3. Ниже исследуется вопрос существования Ф-факторизации вне связи со значениями частных индексов. При этом используются результаты работ ^(3, 10), в частности, локальный принцип.

Через $c(n, p)$ ($\sigma(n, p)$) обозначим существенную норму ⁽¹⁰⁾ оператора $P_-(S)$. Имеют место соотношения: $c(n, p) \leq 1/2(1 + \sigma(n, p))$, $\sigma(1, p) = \max \{ \lg \pi / (2p), \operatorname{ctg} \pi / (2p) \}$ ⁽¹¹⁾; $c(1, p) \leq c(n, p) \leq n^{1/2-1/p} c(1, p)$.

Определение 4. К классу $B(p, Z)$ отнесем м.ф. $G \in L_\infty$, обладающие следующим свойством: для каждой точки $t \in Z$ существует дуга $l_t (\ni t)$ и м.ф. $G_t^\pm$, принадлежащие $E_\infty^\pm$ вместе со своими обратными, такие, что либо

$$\operatorname{Re} (G_t^+(\tau) G(\tau) G_t^-(\tau)) > (1 - c^{-2})^{1/2} \|G_t^+(\tau) G(\tau) G_t^-(\tau)\| \quad \text{при} \quad \tau \in l_t$$

и некотором $c > c(n, p)$, либо почти всюду на l_t $G_t^+(\tau) G(\tau) G_t^-(\tau)$ — нормальная матрица, собственные числа λ которой удовлетворяют условию

$$2\operatorname{Re} \lambda / (1 + |\lambda|^2) > (\sigma^2 - 1) / (\sigma^2 + 1)$$

при некотором $\sigma > \sigma(n, p)$.

Класс $B(p, Z)$ содержит введенный в ⁽¹¹⁾ класс G_b , а при $p=2$ совпадает с определенным в ⁽³⁾ классом $A^*(2, Z)$.

Теорема 7. Если $G \in B(p, Z)$, то сегмент с концами p и $p/(p-1)$ целиком содержится в одном из множеств $\Phi_R(G)$.

Теорема 8. Для м.ф. $G \in L_\infty$ равносильны утверждения:

- 1) $2 \in \Phi(G)$;
- 2) $G \in B(2, Z)$;
- 3) $G = G_0 A$, где $A^{\pm 1} \in M_\infty^-$; $\operatorname{Re} G_0(t) \geq \delta > 0$, $t \in Z$.

Аналог теоремы 8 в скалярном случае, а также импликация $2) \Rightarrow 1)$ в общем случае доказаны в ⁽³⁾. Из теорем 7, 8 и непрерывности функции $s(n, p)$ в точке $p=2$ вытекает

Теорема 9. Если $G \in L_\infty$ и $2 \in \Phi_k(G)$, то $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \subset \Phi_k(G)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Следствие. Если (1) есть Φ -факторизация м.ф. $G \in L_\infty$ в пространстве L_2 , то $G_+^{\pm 1} \in E_{2+\varepsilon}^+$, $G_-^{\pm 1} \in E_{2+\varepsilon}^-$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Теорема 3 доставляет пример м.ф. $G \in L_\infty$, факторизуемой, но не Φ -факторизуемой в пространстве L_2 , для которой заключение следствия не выполняется.

Отметим еще один результат, вытекающий из теоремы 3.

Теорема 10. Пусть N — заданная на Z положительно определенная м.ф. Если $N^{\pm 1} \in L_\infty$, то множество $\Phi(N)$ состоит из единственной компоненты $\Phi_0(N)$, заполняющей весь луч $(1, \infty)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Г. С. Литвинчуку.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
16 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
- ² И. Б. Симоненко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1, 140 (1960).
- ³ И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5, 1138 (1968).
- ⁴ R. G. Douglas, Bull. Am. Math. Soc., v. 74, № 5, 895 (1968).
- ⁵ Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, М., Физматгиз, 1963.
- ⁶ H. R. Pousson, Trans. Am. Math. Soc., v. 133, № 2, 527 (1968).
- ⁷ M. Lee, D. Sarason, J. Math. Anal. and Appl., v. 33, № 3, 529 (1971).
- ⁸ M. Rabindranathan, J. Math. and Mech., v. 19, № 3, 195 (1969).
- ⁹ И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., «Наука», 1970.
- ¹⁰ И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 3, 567 (1965).
- ¹¹ Н. Я. Крупник, В. И. Няга, Матем. исслед., т. 10, в. 1, 144 (1975).