

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. Н. ШТЕРН

# ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 VI 1975)

Консервативные свойства пристенной турбулентности <sup>(1)</sup> позволяют автономно сформулировать следующую задачу: найти турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости вдоль безграничной плоскости, на которой ставятся условия прилипания и задается среднее напряжение трения. На бесконечности требуется отсутствие влияния вязкости на средние и крупномасштабные пульсационные характеристики потока. Такая задача была впервые рассмотрена Л. Прандтлем. Условие «невязкости» на бесконечности является существенным, так как без него задача допускает тривиальное решение в виде ламинарного течения с линейным профилем скорости.

По соображениям размерности решение задачи Прандтля дает вдали от стенки логарифмическое распределение средней скорости. Вблизи стенки в силу условий прилипания существует вязкая зона, в начале которой распределение скорости линейно. Целью настоящей работы является определение профиля средней скорости во всей области течения без привлечения эмпирических данных на основе расчета пульсационного движения в вязкой зоне и гладкого сопряжения решения с асимптотическими зависимостями вдали от стенки.

Решению подлелжит система уравнений Навье — Стокса для пульсационного и среднего движений

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_i v_j - \overline{v_i v_j})}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1)$$

$$\nu U' = \overline{v_*^2 + v_* v_y}; \quad (2)$$

здесь  $v_i = \{v_x; v_y; v_z\}$  — вектор скорости пульсационного движения,  $U_i = \{U(y); 0; 0\}$  — вектор средней скорости,  $p$  — пульсационное давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — вязкость,  $v_*$  — динамическая скорость, которая считается заданной; чертой обозначено осреднение по всем однородным координатам  $x, z$  и  $t$ , а штрихом — дифференцирование по  $y$ .

В силу условий прилипания вблизи стенки найдется зона с малыми пульсациями скорости, квадратами которых можно пренебречь. В этой зоне уравнения (1), (2) могут быть линеаризованы и допускают решения вида

$$v_x = \text{Re}[u(y)T] \cos \beta z, \quad v_y = \text{Re}[v(y)T] \cos \beta z, \quad (3)$$

$$v_z = \text{Re}[w(y)T] \sin \beta z, \quad p = \text{Re}[q(y)T] \cos \beta z, \quad T = 2 \exp[i\alpha(x - Xt)],$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — волновые числа,  $X$  — фазовая скорость волны.

Подставляя (3) в линеаризованное уравнение (1) и исключая давление, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд

$$\nu \theta'' - [\nu k^2 + i\alpha(U - X)]\theta = 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad (4)$$

$$\nu'' - k^2 v = \theta; \quad (5)$$

$$vw'' - [vk^2 + i\alpha(U-X)]w = \frac{\beta}{k^2} [i\alpha(U-X)v' - i\alpha vU' - v\theta']; \quad (6)$$

$$u = \frac{i}{\alpha}(v' + \beta w); \quad q = \frac{1}{k^2} \{v\theta' - i\alpha[(U-X)v' - U'v]\}. \quad (7)$$

Условиям прилипания соответствуют равенства

$$v = v' = w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (8)$$

Условия невязкости получаются, если в (4) и (6) положить  $v = 0$ . Это дает

$$\theta = 0, \quad w = \frac{\beta}{k^2} \left( \frac{U'v}{U-X} - v' \right) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Хотя уравнения (4) и (6) справедливы лишь вблизи стенки, предполагается, что влияние вязкости достаточно быстро исчезает и условия (9) выполняются с хорошей точностью на расстояниях от стенки, когда профиль скорости  $U(y)$  в уравнениях (4)–(7) еще можно считать линейным.

При численной реализации условие (9) ставилось на таком расстоянии, чтобы дальнейшее его увеличение практически не меняло решения, как это обычно делается в теории пограничного слоя. Вопрос о том, существует ли такое расстояние, где можно еще рассматривать линеаризованные уравнения и в то же время пренебречь вязкостью, остается открытым и может быть решен сравнением результатов расчета с опытными данными.

Задача приводится к безразмерному виду, если за масштаб скорости принять величину  $v_*$ , а за характерную длину — вязкий масштаб  $v/v_*$ . Тогда независимая переменная принимает обычную в теории пристенной турбулентности форму  $(yv_*/v)$ , а уравнения (4)–(7) сохраняют вид, если в них положить  $v = 1$ ,  $U = y$  и  $U' = 1$ .

В силу однородности системы (4)–(6) и граничных условий (8), (9) при фиксированных значениях параметров  $\alpha$ ,  $X$ ,  $\beta$  решение определено с точностью до произвольного комплексного множителя  $A$ , аргумент которого несуществен, так как он не влияет на средние характеристики движения такие, как средняя энергия пульсаций  $E$ , напряжение Рейнольдса  $\tau$  и построенный по ним с помощью (2) нелинейный профиль скорости  $U$ :

$$E = |u|^2 + |v|^2 + |w|^2, \quad \tau = -\overline{v_x v_y} = -(u_x v_r + u_r v_x), \quad U' = 1 - \tau. \quad (10)$$

Поэтому константу  $A$  можно считать вещественной и она играет роль амплитудного множителя.

Решение исходной линеаризованной задачи можно искать в виде суперпозиции решений типа (3). При этом для определения амплитуд отдельных гармоник  $A_n$  необходимо задать пульсации во внешней области. Попытки анализа вязкого подслоя, предпринятые в (2–5), в той или иной форме следовали этому плану, используя необходимую информацию из опыта.

В настоящей работе не привлекаются эмпирические данные. Решение строится в моногармоническом приближении. Некоторые основания для такого подхода дают следующие соображения. Потеря устойчивости ламинарного потока и генерация энергии осуществляется в сравнительно узкой спектральной области. Так как генерация в основном сосредоточена на внешней границе вязкой зоны, моногармоническое приближение может оказаться приемлемым. В пользу этого свидетельствуют и опытные данные (6) о довольно простой и практически упорядоченной структуре мгновенного поля скоростей в вязком подслое. Крупномасштабное моногармоническое приближение непригодно для описания тонкой структуры турбулентности, но для профиля средней скорости оно дает, как это показано ниже, хорошие результаты, если параметры колебаний выбраны подходящим образом.

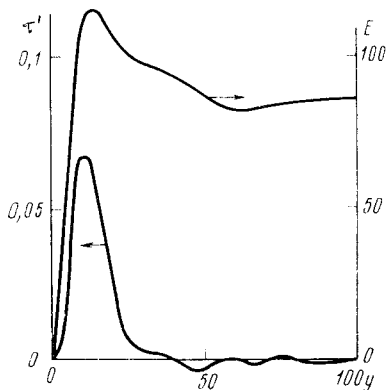


Рис. 1

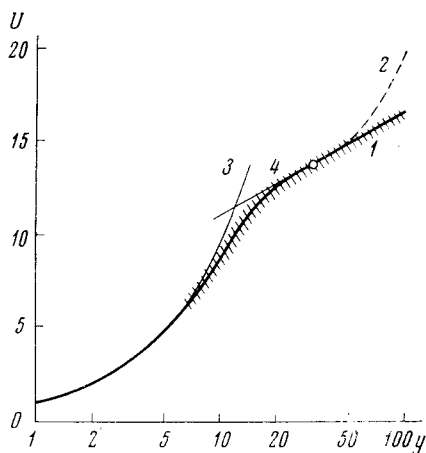


Рис. 2

При произвольных значениях параметров получается типичная картина, изображенная на рис. 1. В окрестности стенки энергия и кривизна профиля скорости ( $\tau' = -U''$ ) находятся в качественном согласии с опытными данными. Однако при больших  $y$  энергия вместо того, чтобы стабилизироваться, начинает экспоненциально нарастать, а кривизна меняет знак, так что на профиле появляются точки перегиба. Эти противоречащие опыту свойства обусловлены линейностью системы (4)–(7). Действительно, решение (4), которое может быть выписано явно в терминах функции Эйри, при больших  $y$  имеет асимптоту

$$\theta(y) \sim \exp \left[ -\frac{\sqrt{2\alpha}}{3} (1+i)(y-X)^{3/2} \right],$$

т. е. при  $y \rightarrow \infty$  убывает быстрее, чем экспоненциально. Тогда из (5) и (8) следует, что  $v$  нарастает пропорционально  $\exp(ky)$ . Так же ведут себя  $u(y)$  и  $w(y)$ , так что  $E \sim \exp(2ky)$ . Поскольку  $v(y)$  и  $w(y)$  становятся вещественными, а  $u(y)$  — чисто мнимой, эти решения не приводят к росту рейнольдсовых напряжений, но в профиле, вообще говоря, возникают точки перегиба.

Таким образом, положение минимума  $E$  или нуля  $U''$  дают оценку сверху для величины интервала  $R$ , где линейное приближение еще может считаться пригодным. Вне этого интервала предполагаются справедливыми асимптотические соотношения, которые следуют из (2), требования отсутствия влияния вязкости на бесконечности и соображений размерности. Так как единственными определяющими параметрами являются  $v_*$  и расстояние от стенки  $y$ , то  $U' \sim v_*/y$  энергия пропорциональна  $v_*^2$ , а турбулентное напряжение стремится к полному, т. е. выполняются соотношения

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln y + C, \quad \tau = 1 - \frac{1}{\kappa y}, \quad E = E_\infty \left( 1 + \frac{\beta}{y} \right), \quad (11)$$

где  $\kappa$ ,  $C$ ,  $E_\infty$  и  $\beta$  — параметры, подлежащие определению, так же как  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$  и  $A$ , из условий сопряжения зависимостей (11) с решением задачи (4)–(9).

Дифференцируя соотношения (11), можно получить условия, не содержащие неизвестных параметров и обеспечивающие максимально гладкое сопряжение по профилю скорости:

$$yE'' + 2E' = 0, \quad y\tau' + \tau = 1, \quad y\tau'' + 2\tau' = 0, \quad y\tau''' + 3\tau'' = 0. \quad (12)$$

Как показало численное исследование, степень гладкости сопряжения, обеспечиваемая условиями (12), не может быть усилена и, следовательно, один из параметров остается неопределенным. Тем самым однородные усло-

вия (12) в пространстве параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$ ,  $R$  выделяют однопараметрическое семейство, характеризуемое, например, параметром  $\beta$ .

Если, оставаясь в этом семействе, положить  $\beta \rightarrow 0$ , то, как показывают расчеты,  $R \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$  и решение вырождается в тривиальное с  $U \equiv y$ . Это обстоятельство подчеркивает существенную трехмерность пульсационного движения для данной постановки задачи. С ростом  $\beta$  кривизна профиля скорости в точке  $y=R$  сначала возрастает, однако с некоторого  $\beta$  начинает убывать, так как точка перегиба на аналитическом продолжении профиля  $U$  с уменьшением масштаба пульсаций приближается к точке  $y=R$ , стремясь попасть внутрь интервала  $0 \leq y \leq R$ .

Поскольку наличие точки перегиба на профиле является признаком его неустойчивости, то, действуя в духе принципа максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений (<sup>7-10</sup>), естественно выбрать такое значение  $\beta$ , которое обеспечивает максимум  $|U''(R)|$ . Последнее условие замыкает задачу.

Алгоритм численного расчета состоит в следующем. Для фиксированного  $\beta$  решается задача (4) — (9), (12). При этом сначала задается наряду с (9) промежуточное нормировочное условие для  $\theta$  и интегрируется задача Коши для уравнения (4). Затем решается задача Коши для уравнения (5) и, наконец, краевая задача (6) с использованием условий (8) и (9).

Параметры  $\alpha$ ,  $X$ ,  $R$  определяются путем удовлетворения однородным условиям (12). Когда это достигнуто, производится перенормировка решения, обеспечивающая выполнение второго условия (12).

Далее  $\beta$  подбирается так, чтобы максимизировать значение  $\tau'(R)$ . Последней процедурой является интегрирование уравнения Рейнольдса (10) с условием  $U(0)=0$  и вычисление параметров  $\kappa$ ,  $C$ ,  $B$  и  $E_\infty$  по формулам

$$\kappa = \frac{1}{R[1-\tau(R)]}, \quad C = U(R) - \frac{1}{\kappa} \ln R,$$

$$B = \frac{R^2 E'(R)}{E(R) + R E'(R)}, \quad E_\infty = \frac{R E(R)}{B + R}.$$

Решению задачи отвечают следующие значения параметров:  $\kappa=0,405$ ;  $C=5,65$ ;  $B=4,37$ ;  $E_\infty=87,7$ ;  $\alpha=0,002125$ ;  $\beta=0,000134$ ;  $X=35,8$ ;  $R=31,9$ .

На рис. 2 кривой 1 изображен рассчитанный профиль скорости. Точка сопряжения  $y=R$  помечена кружком. В месте сопряжения непрерывны функция  $U(y)$  и ее производные до четвертой включительно. Штриховой линией 2 нанесено аналитическое продолжение решения за точку сопряжения. Линия 3 отвечает линейному закону  $U=y$ , линия 4 — закону  $(1/\kappa) \ln y + C$ . Штриховкой обозначена область разброса опытных данных (<sup>11, 12</sup>). Сравнение показывает, что теоретический профиль и константы  $\kappa$ ,  $C$  и  $B$  находятся в согласии с опытными данными с точностью до разброса последних.

Согласно вычислениям напряжения Рейнольдса вблизи стенки имеют разложение в степенной ряд вида  $\tau=0,23 \cdot 10^{-5} y^3 + 18 \cdot 10^{-5} y^4$ , причем эти два члена аппроксимируют  $\tau$  с точностью до 10% при  $y < 2$ .

Институт теплофизики  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

Поступило  
29 V 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. С. Кутателадзе, Пристенная турбулентность, Новосибирск, «Наука», 1973.
- <sup>2</sup> H. A. Einstein, H. Li, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., v. 82, 949 (1956).
- <sup>3</sup> J. Sternberg, J. Fluid Mech., v. 13, № 2 (1962).
- <sup>4</sup> G. Schubert, G. M. Corcos, J. Fluid Mech., v. 29, № 1 (1967).
- <sup>5</sup> Б. А. Кадер, Сб.: Турбулентные течения, М., 1970.
- <sup>6</sup> S. J. Kline, W. C. Reynolds et al., J. Fluid Mech., v. 30, № 4 (1967).
- <sup>7</sup> М. А. Гольдштик, С. С. Кутателадзе, ДАН, т. 185, № 3 (1969).
- <sup>8</sup> М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, ДАН, т. 188, № 4 (1969).
- <sup>9</sup> А. М. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн, ДАН, т. 193, № 4 (1970).
- <sup>10</sup> C. J. Lawn, J. Fluid Mech., v. 48, № 3 (1971).
- <sup>11</sup> J. Laufer, NACA Rep. 1174, 1954.