

Член-корреспондент АН СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ, Н. П. ДОЛБИЛИН,
М. И. ШТОГРИН, Р. В. ГАЛИУЛИН

ЛОКАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПРАВИЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Всякая кристаллическая структура (т. е. структура бесконечного идеального монокристалла) правильна. Под словом «правильна» понимают то, что полная группа G движений пространства, совмещающих эту структуру с собой, дискретна (что очевидно в силу атомного строения) и с конечной фундаментальной областью. Это последнее обстоятельство следовало бы считать основным законом кристаллографии, поскольку оно лежит в основе всей геометрической кристаллографии, а между тем его физическая причина до сих пор до конца не выяснена.

Вообще, правильной системой точек (орбитой) называется совокупность точек, полученных из некоторой точки пространства некоторой группой движений пространства. Но в кристаллографии, как мы сейчас отметили, имеют особое значение дискретные группы G с конечной фундаментальной областью. Поэтому в дальнейшем под правильной системой мы будем понимать орбиты только относительно таких групп. Любая кристаллическая структура, очевидно, состоит из конечного числа правильных систем атомов, связанных с ее группой G .

Правильная система точек, в силу дискретности группы G и конечности ее фундаментальной области, является (r, R) -системой (r, R — некоторые вещественные положительные числа). Напомним ⁽¹⁾, что (r, R) -системой называется множество точек пространства, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) расстояние между любыми двумя различными его точками не меньше r ;
- 2) внутри или на границе шара радиуса R , где бы ни взять в пространстве его центр, имеется хотя одна точка этого множества.

Для любой заданной (r, R) -системы имеется наибольшее число, удовлетворяющее условию 1), и наименьшее число, удовлетворяющее условию 2). Ниже, всякий раз говоря об (r, R) -системе, мы будем понимать под r и R именно эти экстремальные для данной системы значения.

Конечно, не всякая (r, R) -система правильная. Для того чтобы (r, R) -система была правильной, необходимо и достаточно, как говорил Федоров, чтобы из каждой точки системы все остальные ее точки были «видны так же», как из любой другой. Это же более четко сформулировал Гильберт и Кон-Фоссен. Возьмем произвольную точку системы, соединим ее со всеми остальными точками системы отрезками. Таким образом получим для данной точки бесконечный «паук». Система будет правильной тогда и только тогда, когда для всех точек системы эти «пауки» конгруэнтны. Иначе говоря, для любых двух точек правильной системы существует движение, переводящее первую во вторую и совмещающее всю систему с собой.

Цель настоящей работы — показать, что во всех трех пространствах (евклидовом, сферическом и Лобачевского) любого числа измерений для правильности (r, R) -системы достаточно конгруэнтности некоторых небольших конечных, так называемых стабильных «паучков» всех ее точек.

1. Стабильный паучок точки (r, R) -системы. Пусть S — (r, R) -система в пространстве E^n , где E^n — n -мерное пространство либо евклидово, либо Лобачевского, либо сферическое.

Рассмотрим шар произвольного радиуса ρ с центром в точке $A \in S$. Множество точек из S , лежащих внутри или на границе этого шара, будем

обозначать $S_A(\rho)$, а группу всех поворотов пространства E^n вокруг точки A , совмещающих $S_A(\rho)$ с собой, — $H_A(\rho)$.

Множество $S_A(\rho)$ для каждого ρ , в силу r -свойства системы S , конечно. Покажем, что при $\rho=2R$ множество $S_A(2R)$ расположено уже n -мерно, откуда будет следовать, что группа $H_A(2R)$ конечна.

Действительно, любая точка из S , расположенная внутри или на границе какого-либо шара радиуса R , на границе которого лежит точка A , принадлежит $S_A(2R)$. В силу r -свойства и R -свойства системы, внутри или на границе такого шара имеется точка A_1 , причем точка A_1 отличается от A . Это потому, что если бы этому шару не принадлежала никакая точка из S , кроме A , то можно было бы его увеличить, сначала слегка отодвинув его от точки A так, что он при этом не имел бы ни внутри, ни на границе никаких точек из S . А это противоречит условию 2). Аналогично, внутри или на границе шара радиуса R , касающегося прямой AA_1 в точке A , имеется точка A_2 , отличающаяся от A , причем вектор AA_2 не коллинеарен вектору AA_1 . Внутри или на границе шара радиуса R , касающегося двумерной плоскости AA_1A_2 в точке A , имеется точка A_3 , отличающаяся от A , причем вектор AA_3 не компланарен AA_1A_2 и т. д. Так мы получим n -мерный репер $AA_1A_2 \dots A_n$, где все A_i лежат в $S_A(2R)$.

Заметим, что в сферическом пространстве существование точки A_{i+1} , $0 \leq i \leq n-1$, $A_0=A$, лежащей вне i -мерной плоскости $A_0A_1 \dots A_i$, заведомо будет обеспечено при $R < c/4$, где c — длина большой окружности рассматриваемой сферы. Поэтому мы будем предполагать, что в случае сферического пространства имеет место неравенство $R < c/4$.

Очевидно, что $H_A(\rho) \supseteq H_A(\rho')$ при $\rho < \rho'$. Поскольку группа $H_A(2R)$ конечна и система S дискретна, существует такое значение ρ_0 , что при $\rho \geq \rho_0$ группа $H_A(\rho)$ конечна, а при $\rho < \rho_0$ группа $H_A(\rho)$ бесконечна. Очевидно, что $r \leq \rho_0 < 2R$.

Покажем, что для любой точки A из (r, R) -системы S существует такое число ρ_1 , ограниченное сверху в зависимости от r, R и n , что $H_A(\rho_1+2R) = H_A(\rho_1)$. В дальнейшем под значением ρ_1 для данной точки A мы будем понимать наименьшее для нее такое число. Действительно, обозначим порядок группы $H_A(\rho)$, которая конечна при $\rho \geq \rho_0$, через $h_A(\rho)$. Функция от ρ $h_A(\rho)$ определена при $\rho \geq \rho_0$, принимает натуральные значения и не возрастает. График этой функции, очевидно, ступенчатый, причем высоты (над осью ρ) ступенек — натуральные числа, и высота каждой следующей ступеньки, по теореме Лагранжа о подгруппах, является делителем высоты предыдущей. Поэтому число ступенек конечно и во всяком случае не превышает $v+1$, где v — число простых множителей числа $h_A(\rho_0)$. Последняя ступенька, очевидно, бесконечна. В качестве ρ_1 надо взять начало первой ступеньки, длина (вдоль ρ) которой больше $2R$. Начало ρ_1 такой ступеньки удовлетворяет, как легко видеть, неравенству $\rho_1 < (v+1)2R$.

Множество точек $S_A(\rho_1+2R)$ будем называть стабильным множеством точки A и обозначать S_A . Множество $S_A(\rho_1)$ будем называть предстабильным и обозначать $\tilde{S}_A$. Совокупность векторов, исходящих из точки A в каждую точку S_A (или $\tilde{S}_A$), будем называть соответственно стабильным (или предстабильным) паучком точки A и обозначать через P_A (или $\tilde{P}_A$).

Теорема, которую мы собираемся доказать, состоит в следующем:

Теорема. Пусть S — (r, R) -система точек в E^n , где E^n — n -мерное пространство либо евклидово, либо сферическое, либо Лобачевского. Для того чтобы система S была правильной, достаточно, чтобы стабильные паучки всех ее точек были конгруэнтны, и тогда система S однозначно задана паучком.

2. О $2R$ -цепочках в (r, R) -системе. $2R$ -цепочкой в системе S мы называем последовательность точек из S такую, что расстояние между любыми двумя соседними в этой последовательности точками не превышает $2R$.

Лемма. Любые две точки A и B произвольной (r, R) -системы S можно соединить $2R$ -цепочкой.

Действительно, если расстояние между A и B не превышает $2R$, то A, B является такой $2R$ -цепочкой. Если же расстояние между A и B больше $2R$, то рассмотрим шар радиуса R , на границе которого лежит точка A , с центром на отрезке AB (для сферического пространства — на кратчайшей AB). В силу R -свойства внутри или на границе этого шара лежит точка A_1 системы S , отличная от точки A , причем $AA_1 \leq 2R$ и $A_1B < AB$. Если $A_1B \geq 2R$, то AA_1B есть искомая $2R$ -цепочка. Если же $A_1B < 2R$, то рассмотрим шар радиуса $2R$, на границе которого лежит точка A_1 , с центром на A_1B . Внутри или на границе этого шара имеется точка A_2 из S , отличная от точки A_1 , причем $A_1A_2 \leq 2R$ и $A_2B < A_1B$ и т. д. Процесс этот, очевидно, остановится, потому что все так получаемые точки $A_1, A_2, \dots$ различны, и лежат внутри шара радиуса AB с центром в точке B , а таких точек из S в силу r -свойства системы S конечное число.

3. Доказательство теоремы. Пусть в (r, R) -системе стабильные паучки всех ее точек конгруэнтны.

Рассмотрим любые две точки A и B системы S и обозначим через ∂ движение пространства E^n , переводящее стабильный паучок P_A в стабильный паучок P_B . Докажем, что при движении ∂ произвольная точка C из S переходит в некоторую точку D из S . Для этого точки A и C соединим $2R$ -цепочкой $AA_1A_2 \dots A_nC$. Точка A_1 принадлежит S_A и поэтому при движении ∂ точка A_1 перейдет в некоторую точку B_1 из S_B . Очевидно, что шар радиуса ρ_1 с центром в точке A_1 лежит в шаре радиуса $\rho_1 + 2R$ с центром в точке A , а шар радиуса ρ_1 с центром в B_1 лежит в шаре радиуса $\rho_1 + 2R$ с центром в B . Поэтому предстабильный паучок $\bar{P}_{A_1}$ при движении ∂ переходит в предстабильный паучок $\bar{P}_{B_1}$. Но в таком случае и стабильный паучок P_{A_1} при движении ∂ перейдет в стабильный паучок P_{B_1} , что следует из конгруэнтности стабильных паучков и из того, что всякий поворот предстабильного паучка в себя совмещает с собой и стабильный паучок этой точки.

Таким образом, движение ∂ , которое переводило P_A в P_B , переводит P_{A_1} в P_{B_1} . Повторяя те же рассуждения для точек A_1 и B_1 , мы убедимся, что движение ∂ переводит точку $A_2 \in S_{A_1}$ в точку $B_2 \in S_{B_1}$, предстабильный паучок $\bar{P}_{A_2}$ — в предстабильный паучок $\bar{P}_{B_2}$, и следовательно, стабильный паучок P_{A_2} — в стабильный паучок P_{B_2} и т. д. Поэтому движение ∂ переводит точку $C \in S$ в некоторую точку $D \in S$.

Так как движение ∂^{-1} переводит стабильный паучок P_B в стабильный паучок P_A , то на основании аналогичных рассуждений движение ∂^{-1} любую точку $D \in S$ переводит в некоторую точку $C \in S$. В итоге мы получаем, что рассматриваемое движение ∂ совмещает (r, R) -систему S с собой. Так как A и B — любые две точки из S , то доказательство теоремы завершено.

Замечание. Вопрос о том, не достаточно ли для правильности системы конгруэнтности еще меньших паучков, нами не выяснен. Но следует отметить, что конгруэнтности слишком малых паучков недостаточно. Так, например ⁽²⁾, уже на двумерной сфере имеется (r, R) -система точек, которая не правильна, несмотря на то, что конгруэнтны все ее паучки $P_A(2R)$, хотя эти паучки в некотором смысле не так уж малы. Аналогичные примеры имеют место и на плоскости.

Авторы думают, что доказанная геометрическая теорема может оказаться полезной при выяснении физической причины правильности атомной структуры монокристалла.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Н. Делоне, УМН, в. 3, 16 (1937). ² В. Г. Ашкингузе, Математическое предложение, в. 1, 107 (1957).