

ISSN 1561-8323 (print)

УДК 517.925

Поступило в редакцию 13.09.2017

Received 13.09.2017

М. С. Белокурский*Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь***ЧАСТИЧНО НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ***(Представлено академиком Н. А. Изобовым)*

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых линейная почти периодическая дифференциальная система имеет частично нерегулярные почти периодические решения в критическом резонансном случае.

Ключевые слова: частично нерегулярные решения, линейные дифференциальные системы, почти периодические системы, критический резонансный случай

Для цитирования: Белокурский, М. С. Частично нерегулярные решения линейных почти периодических дифференциальных систем в критическом резонансном случае / М. С. Белокурский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 16–21.

Maksim S. Belokursky*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus***PARTIALLY IRREGULAR SOLUTIONS OF LINEAR ALMOST PERIODIC DIFFERENTIAL SYSTEMS IN THE CRITICAL RESONANCE CASE***(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)*

Abstract. The necessary and sufficient conditions, under which a linear almost periodic differential system has partially irregular almost periodic solutions in the critical resonance case, were obtained.

Keywords: partially irregular solutions, linear differential systems, almost periodic systems, critical resonant case

For citation: Belokursky M. S. Partially irregular solutions of linear almost periodic differential systems in the critical resonance case. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 16–21 (in Russian).

Пусть D – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, а $AP(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$ – пространство функций $f: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что каждая $f(t, x) \in AP(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$ является непрерывной по совокупности переменных и почти периодической по t равномерно относительно $x \in D$. Следуя [1, с. 60], через $\text{Mod}(f)$ обозначим частотный модуль функции f , т. е. наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую множество показателей Фурье (частот) функции f . Под частотным модулем разрешенной относительно производной системы почти периодических уравнений будем понимать модуль частот её правой части. Я. Курцвейль, О. Вейвода в [2] показали, что системы обыкновенных почти периодических дифференциальных уравнений могут иметь сильно нерегулярные почти периодические решения, т. е. такие решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. А. К. Деменчук изучал почти периодические решения, частотный модуль которых содержит только некоторые частоты системы, в работах [3–5] и др. Такие решения названы частично нерегулярными [4, гл. 2].

В данном сообщении исследуется вопрос существования частично нерегулярных почти периодических решений линейной почти периодической системы в критическом резонансном случае, когда среди собственных чисел усреднения матрицы коэффициентов имеются чисто мнимые с непростыми элементарными делителями. Случай, когда среди собственных чисел имеются чисто мнимые с простыми элементарными делителями был исследован в [4, с. 149] и [6].

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad \text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(\varphi) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

предполагая почти периодичность матрицы коэффициентов $A(t)$ и вынуждающей силы $\varphi(t)$ с тривиальным пересечением их частотных модулей. Для системы (1) почти периодические решения с модулем вынуждающей силы называются нерегулярными вынужденными [4, с. 137]. Выясним вопрос о существовании нерегулярных по отношению к $\text{Mod}(A)$ почти периодических решений $x(t)$ системы (1), т. е. таких что $(\text{Mod}(x) + \text{Mod}(\varphi)) \cap \text{Mod}(A) = \{0\}$, в критическом резонансном случае.

Для решения поставленной задачи, следуя [3], предварительно выполним редукцию системы (1) к системе меньшей размерности. Пусть $x(t)$ – почти периодическое решение системы (1), нерегулярное по отношению к частотному модулю матрицы коэффициентов. Тогда согласно [4, с. 37] вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x + \varphi(t), \quad [A(t) - \hat{A}]x = A_*(t)x = 0, \quad \hat{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \quad (2)$$

Поскольку частотный модуль матрицы $A_*(t)$ содержится в $\text{Mod}(A)$ и $\text{Mod}(x) \cap \text{Mod}(A) = \{0\}$, то из второй системы в силу [4, с. 41, 43] вытекает, что матрица $A_*(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, т. е. выполняется условие

$$\text{rank}_{\text{col}} A_* = d < n. \quad (3)$$

В таком случае найдется постоянная неособенная $n \times n$ -матрица Q_{A_*} такая, что у матрицы $A_*(t)Q_{A_*}$ первые $n - d = s$ столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы. Тогда замена переменных $x = Q_{A_*}y$ приводит систему (2) к системе $\frac{dy}{dt} = By + \psi(t)$, $B_*(t)y = 0$, где $B = Q_{A_*}^{-1} \hat{A} Q_{A_*}$; $\psi(t) = Q_{A_*}^{-1} \varphi(t)$; $B_*(t) = A_*(t)Q_{A_*}$.

Согласно исходному предположению полученная система также имеет почти периодическое решение $y(t) = Q_{A_*}^{-1} x(t)$, $\text{Mod}(y) = \text{Mod}(x)$. Столбцы матрицы $B_*(t)$ с номерами $n - d + 1, \dots, n$ линейно независимы. Поэтому из равенства $B_*(t)y = 0$ согласно [4, с. 41] вытекает, что соответствующие компоненты почти периодического решения с заданным свойством частот должны быть нулевыми, т. е. $y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_{n-d}(t), 0, \dots, 0)$. Это означает, что последняя система примет вид

$$\frac{dy^{[s]}}{dt} = B^{[s,s]}y^{[s]} + \psi^{[s]}(t), \quad B_{[n-s,s]}y^{[s]} + \psi_{[n-s]}(t) = 0, \quad y_{[n-s]} = 0, \quad (4)$$

где $y = \text{col}(y^{[s]}, y_{[n-s]})$, $y^{[s]} = \text{col}(y_1, \dots, y_s)$, $y_{[n-s]} = \text{col}(y_{s+1}, \dots, y_n)$, $B^{[s,s]}$, $B_{[n-s,s]}$ – соответственно верхний и нижний блоки $n \times s$ -матрицы, полученной из матрицы B вычеркиванием последних d столбцов (нижние индексы указывают размерности блоков); $\psi(t) = \text{col}(\psi^{[s]}(t), \psi_{[n-s]}(t))$.

Первая система из (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t) = (Q_{A_*}^{-1})^{[s,n]} x(t)$, где $(Q_{A_*}^{-1})^{[s,n]}$ – первые s строк матрицы $Q_{A_*}^{-1}$. Так как $y(t) = Q_{A_*}^{-1} x(t)$, $y(t) = \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$, то $\text{Mod}(y^{[s]}) = \text{Mod}(x)$. Как следует из (4), вектор $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$B_{[n-s,s]}y^{[s]}(t) + \psi_{[n-s]}(t) \equiv 0. \quad (5)$$

Таким образом, если система (1) имеет почти периодическое решение $x(t)$, нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$, то выполняются условия (3), (5), где $y^{[s]}(t)$ – почти периодическое решение первой системы из (4) с аналогичным свойством частот.

Справедливо и обратное утверждение. Покажем, что при выполнении условия (3) нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ почти периодическое решение системы (4) является также решением системы (1). Поскольку $y^{[s]}(t)$ – решение первой системы из (4), удовлетворяющее тождеству (5),

то $y(t) = \text{col}(y^{[s]}(t), \dots, 0)$ является решением всей системы (4). В силу условия (3) существует невырожденное преобразование $x = Q_{A*} y$ такое, что вектор $x(t) = Q_{A*} \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$ является почти периодическим решением системы (2), а значит, и системы (1), при этом $\text{Mod}(x) = \text{Mod}(y^{[s]})$.

Итак, имеет место

Л е м м а [4]. Для того чтобы система (1) имела почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) столбцовый ранг матрицы $A(t) - \hat{A}(t)$ удовлетворял неравенству (3);
- 2) первая система из (4) имела почти периодическое решение $y^{[s]}(t)$ такое, что $(\text{Mod}(y^{[s]}) + \text{Mod}(\varphi)) \cap \text{Mod}(A) = \{0\}$;
- 3) выполнялось тождество (5), при этом $x(t) = Q_{A*} \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$, где Q_{A*} – постоянная неособенная $n \times n$ -матрица такая, что первые $s = n - d$ столбцов матрицы $[A(t) - \hat{A}(t)]Q_{A*}$ нулевые.

Перейдем теперь к выяснению условий существования требуемых частично нерегулярных почти периодических решений системы (1). Пусть $\alpha_k \pm i\beta_k$ ($k = 1, \dots, k'; k' \leq n; i^2 = -1$) – собственные числа матрицы коэффициентов $B^{[s,s]}$ редуцированной системы (4). Как отмечено выше, в работе [6] изучен случай чисто мнимых собственных значений матрицы $B^{[s,s]}$ с простыми элементарными делителями.

Предположим, что имеет место критический резонансный случай, когда среди собственных чисел матрицы $B^{[s,s]}$ имеется пара чисто мнимых кратности два с непростыми элементарными делителями, такая, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \beta_1 \in \text{Mod}(\varphi), \quad \alpha_q \neq 0 \quad (q = 3, \dots, k'). \quad (6)$$

Положим $G(t) = S_2^{-1}(t)(J_{B^{[s,s]}} S_2(t) - \dot{S}_2(t))$, $S(t) = S_2^{-1}(t) S_1^{-1}$, где $S_2(t) = \text{diag}[e^{i\beta_1 t}, e^{i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, e^{-i\beta_1 t}, 1, \dots, 1]$, $\dot{S}_2(t)$ – производная матрицы $S_2(t)$, а матрица S_1 приводит матрицу $B^{[s,s]}$ к жордановой нормальной форме, т. е.

$$S_1^{-1} B^{[s,s]} S_1 = J_{B^{[s,s]}} = \text{diag}[J_1, J_2, J_3, \dots, J_{k'}] = \text{diag}[J_1, J_2, J],$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} i\beta_1 & 1 \\ 0 & i\beta_1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -i\beta_1 & 1 \\ 0 & -i\beta_1 \end{pmatrix},$$

где J – жорданова форма, отвечающая остальным собственным значениям матрицы $B^{[s,s]}$. Обозначим через $g_{(j)}(t)$ j -ю строку матрицы $g(t) = S(t)\psi^{[s]}(t)$, а через $S_{(j)}(t)$ j -ю строку матрицы $S(t)$.

Т е о р е м а. Пусть в системе (1) матрица коэффициентов $A(t)$ и вынуждающая сила $\varphi(t)$ – почти периодические с тривиальным пересечением их частотных модулей и для редуцированной системы (4) имеет место критический резонансный случай (6). Тогда:

1) Если система (1) имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение $x(t)$, то это решение является нерегулярным вынужденным, т. е. $\text{Mod}(x) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$;

2) Для того, чтобы система (1) имела нерегулярное вынужденное почти периодическое решение необходимо и достаточно выполнения условия (3) и оценки

$$\sup_t \left| \int_0^t S_{(2)}(\tau) \psi^{[s]}(\tau) d\tau \right| < \infty, \quad \sup_t \left| \int_0^t \left(\int_0^\tau S_{(2)}(\sigma) \psi^{[s]}(\sigma) d\sigma + S_{(1)} \psi^{[s]}(\tau) \right) d\tau \right| < \infty, \quad (7)$$

а для почти периодического решения $y^{[s]}(t)$ первой системы (4) в случае (6) имело место тождество (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем первое утверждение. Если система (1) имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение $x(t)$, то согласно лемме $x(t) = Q_{A*} \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$, где $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет первой системе из (4), при этом $y^{[s]}(t) = y_0^{[s]}(t) + \tilde{y}^{[s]}(t)$, где $y_0^{[s]}(t)$ – почти периодическое решение соответствующей однородной системы; $\tilde{y}^{[s]}(t)$ – частное почти периодическое решение неоднородной системы. Так как со-

ответствующая первой системе из (4) однородная система стационарна и ее матрица коэффициентов имеет собственные числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_2 = \beta_1 \in \text{Mod}(\varphi)$, $\alpha_q \neq 0$ ($q = 3, \dots, s$), то $\text{Mod}(y_0^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. Пусть $M_{B[s,s]} \{\beta_1\}$ – модуль, образованный числом β_1 . Тогда $\text{Mod}(\tilde{y}^{[s]}) \subseteq (\text{Mod}(\varphi) + M_{B[s,s]} \{\beta_1\})$, откуда в силу (6) следует, что $\text{Mod}(\tilde{y}^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. Следовательно, $\text{Mod}(x) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$, т. е. решение $x(t)$ является нерегулярным вынужденным.

Докажем необходимость второго утверждения. Пусть $x(t)$ – почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение системы (1). Тогда на основании леммы столбцовый ранг матрицы $A_*(t)$ удовлетворяет неравенству (3) и система (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t) = [Q_{A_*}^{-1}]_{s,n} x(t)$ с таким же свойством частот, что и $x(t)$, где $[Q_{A_*}^{-1}]_{s,n} - s \times n$ -матрица, составленная из первых s строк невырожденной матрицы $Q_{A_*}^{-1}$.

Выполним в первой системе из (4) замену переменных $y^{[s]} = S_1 z^{[s]}$. Тогда получим систему

$$\frac{dz^{[s]}}{dt} = J_{B[s,s]} z^{[s]} + S_1^{-1} \psi^{[s]}(t), \quad (8)$$

которая имеет почти периодическое решение $z^{[s]}(t) = S_1^{-1} y^{[s]}(t)$. Далее замена $z^{[s]} = S_2(t) u^{[s]}$ приводит систему (8) к системе

$$\frac{du^{[s]}}{dt} = S_2^{-1}(t)(J_{B[s,s]} S_2(t) - \dot{S}_2(t)) u^{[s]} + S_2^{-1}(t) S_1^{-1} \psi^{[s]}(t) = G(t) u^{[s]} + S(t) \psi^{[s]}(t) = G(t) u^{[s]} + g(t), \quad (9)$$

где $G(t) = \text{diag}[G_0, G_0, J]$, $G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, с почти периодическим решением $u^{[s]}(t) = S_2^{-1}(t) z^{[s]}(t) = S_2^{-1}(t) S_1^{-1} y^{[s]}(t) = S(t) [Q_{A_*}^{-1}]_{s,n} x(t)$. Выпишем систему (9) более подробно:

$$\begin{aligned} \frac{du_1^{[s]}}{dt} &= u_2^{[s]} + g_1(t) = u_2^{[s]} + S_{(1)}(t) \psi^{[s]}(t), & \frac{du_2^{[s]}}{dt} &= g_2(t) = S_{(2)}(t) \psi^{[s]}(t), \\ \frac{du_3^{[s]}}{dt} &= u_4^{[s]} + g_3(t) = u_4^{[s]} + S_{(3)}(t) \psi^{[s]}(t), & \frac{du_4^{[s]}}{dt} &= g_4(t) = S_{(4)}(t) \psi^{[s]}(t), \\ \frac{d\tilde{u}^{[s]}}{dt} &= J\tilde{u}^{[s]} + \tilde{g}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $u^{[s]} = \text{col}(u_1^{[s]}, u_2^{[s]}, u_3^{[s]}, u_4^{[s]}, \tilde{u}^{[s]})$, $g^{[s]} = \text{col}(g_1, g_2, g_3, g_4, \tilde{g}^{[s]})$.

Покажем, что первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты решения $u^{[s]}$ системы (10) попарно сопряжены, т. е. $u_4^{[s]} = \overline{u_2^{[s]}}$, $u_3^{[s]} = \overline{u_1^{[s]}}$. Для этого рассмотрим однородную систему

$$\frac{dz^{[s]}}{dt} = J_{B[s,s]} z^{[s]}.$$

Матрица коэффициентов $J_{B[s,s]}$ этой системы имеет жорданову форму. Из [7, с. 324] следует, что первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты решения $z^{[s]}$ последней системы попарно сопряжены, т. е. $z_4^{[s]} = \overline{z_2^{[s]}}$, $z_3^{[s]} = \overline{z_1^{[s]}}$. Замена $z^{[s]} = S_2(t) u^{[s]}$ переводит матрицу $J_{B[s,s]}$ в матрицу $G(t)$, которая отличается от $J_{B[s,s]}$ лишь нулевой главной диагональю. Следовательно, сопряжение будет иметь место и для соответствующих компонент решения $\tilde{u}^{[s]}$ системы

$$\frac{du^{[s]}}{dt} = G(t) u^{[s]},$$

т. е. $u_{04}^{[s]} = \overline{u_{02}^{[s]}}$, $u_{03}^{[s]} = \overline{u_{01}^{[s]}}$. Чтобы найти эти компоненты решения запишем последнюю систему более подробно:

$$\frac{du_{01}^{[s]}}{dt} = u_{02}^{[s]}, \quad \frac{du_{02}^{[s]}}{dt} = 0, \quad \frac{du_{03}^{[s]}}{dt} = u_{04}^{[s]}, \quad \frac{du_{04}^{[s]}}{dt} = 0, \quad \frac{d\tilde{u}_0^{[s]}}{dt} = J\tilde{u}_0^{[s]},$$

где $u_0^{[s]} = \text{col}(u_{01}^{[s]}, u_{02}^{[s]}, u_{03}^{[s]}, u_{04}^{[s]}, \tilde{u}_0^{[s]})$. Первые четыре компоненты общего решения этой системы с учетом сопряженности имеют вид $\text{col}(c_1 t + c_2, c_1, c_1 t + c_2, c_1)$. Находим методом вариации

произвольных постоянных первые четыре компоненты частного решения системы (9), которые также являются попарно сопряженными:

$$\text{col}(t \int g_2(t) dt + \int (g_1(t) - t g_2(t)) dt, \int g_2(t) dt, t \int g_4(t) dt + \int (g_3(t) - t g_4(t)) dt, \int g_4(t) dt).$$

Из их сопряженности вытекает, что $g_3(t) = \overline{g_1(t)}$, $g_4(t) = \overline{g_2(t)}$. Из сопряженности компонент общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы следует попарная сопряженность первых четырех компонент систем (9) и (10), т. е. $u_4^{[s]} = \overline{u_2^{[s]}}$, $u_3^{[s]} = \overline{u_1^{[s]}}$.

Итак, почти периодические решения первых четырех уравнений системы (10) являются попарно сопряженными и имеют вид

$$\begin{aligned} u_2^{[s]}(t) &= \int_0^t S_{(2)}(\tau) \psi^{[s]}(\tau) d\tau, & u_1^{[s]}(t) &= \int_0^t \left(\int_0^\tau S_{(2)}(\sigma) \psi^{[s]}(\sigma) d\sigma + S_{(1)}(\tau) \psi^{[s]}(\tau) \right) d\tau, \\ u_4^{[s]}(t) &= \int_0^t S_{(4)}(\tau) \psi^{[s]}(\tau) d\tau, & u_3^{[s]}(t) &= \int_0^t \left(\int_0^\tau S_{(4)}(\sigma) \psi^{[s]}(\sigma) d\sigma + S_{(3)}(\tau) \psi^{[s]}(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому согласно [1, с. 79] интегралы, стоящие в правых частях последних равенств, будут ограничены, т. е. выполняются условия (7).

Докажем достаточность второго утверждения. Пусть условия теоремы выполнены. В силу (3) существует линейное преобразование, приводящее (2) к системе (4), где $y_{s+1} = \dots = y_n = 0$. Отметим, что матрица $B^{[s,s]}$ имеет собственные числа (6) по предположению.

Невырожденная замена переменных $y^{[s]} = S(t)u^{[s]}$ приводит первую систему из (4) к системе (10). Согласно [1, с. 79] при выполнении условий (7) первые четыре уравнения из (10) имеют почти периодические решения $u_j^{[s]}(t)$, $j = 1, 4$. Так как вещественные части собственных чисел матрицы J ненулевые, то в силу [1, с. 76] последняя система в (10) имеет единственное почти периодическое решение $\tilde{u}^{[s]}(t)$. Тогда вектор $y^{[s]}(t) = S(t) \text{col}(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), \tilde{u}^{[s]}(t))$ будет удовлетворять первой системе из (4). С учетом тождества (5) $y(t) = \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$ – почти периодическое решение системы (4). Поэтому согласно лемме $x(t) = Q_{A*} y(t)$ является решением системы (1), причем в силу первого утверждения $x(t)$ будет нерегулярным вынужденным.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие (7) теоремы содержит интеграл от интеграла. Если пара собственных чисел с непростым делителем будет иметь кратность 3 и более, то условия существования нерегулярного вынужденного почти периодического решения будут аналогичны условиям доказанной выше теоремы с той лишь разницей, что в условии (7) появится интеграл с подынтегральной функцией, которая является интегралом от интеграла и т. д. Таким образом, с возрастанием кратности будет усложняться условие (7).

В качестве примера возьмем линейную квазипериодическую дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_4 + x_5, & \dot{x}_2 &= s(t)x_1 + (1 + s(t))(x_2 - x_4), \\ \dot{x}_3 &= c(t)(x_1 + x_2 - x_4) + x_5 + \cos t, & \dot{x}_4 &= -2x_1 + x_4 + x_5, \\ \dot{x}_5 &= -c(t)(x_1 + x_2 + x_4) - x_3 + \sin t, & s(t) &\equiv \sin \sqrt{5}t, \quad c(t) \equiv \cos \sqrt{5}t, \end{aligned} \quad (11)$$

в которой пересечения модулей частот коэффициентов и вынуждающей силы тривиально. С помощью теоремы находим нерегулярное периодическое решение системы (11)

$$x = \text{col}(a \sin t - b \cos t, a \cos t + b \sin t, \sin t, (a + b) \sin t + (a - b) \cos t, 0), \quad x \in \mathbb{R}^5,$$

где a, b – произвольные вещественные постоянные. Поскольку частота этого решения совпадает с частотой вынуждающей силы и несоизмерима с частотой коэффициентов системы (11), то оно является нерегулярным вынужденным.

З а м е ч а н и е 2. Если взять более высокую размерность, то подобным образом можно привести пример системы с нерегулярным квазипериодическим (почти периодическим) решением.

Список использованных источников

1. Fink, A. M. *Almost Periodic Differential Equations* / A. M. Fink. – Berlin: Springer, 1974. – 336 p. doi.org/10.1007/bfb0070324
2. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
3. Demenchuk, A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A. K. Demenchuk // *Math. Bohemica*. – 2001. – Vol. 126, N 1. – P. 221–228.
4. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление / А. К. Деменчук. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 186 p.
5. Деменчук, А. К. О частично нерегулярных почти периодических решениях линейных дифференциальных систем в некритическом случае / А. К. Деменчук // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 11–16.
6. Белокурский, М. С. Нерегулярные решения линейных почти периодических дифференциальных систем в резонансном случае / М. С. Белокурский // Тр. Ин-та математики. – 2013. – Т. 21, № 2. – С. 12–18.
7. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1982. – 331 с.

References

1. Fink A. M. *Almost Periodic Differential Equations*. Berlin, Springer, 1974. 336 p. doi.org/10.1007/bfb0070324
2. Kurtsveil' Ya., Veivoda O. On the periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370.
3. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Mathematica Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.
4. Demenchuk A. K. *Asynchronous fluctuations in differential systems. The conditions of existence and control*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2012. 186 p. (in Russian).
5. Demenchuk A. K. On the existence of almost periodic solutions of linear differential systems in noncritical case. *Vesti Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2003, no. 3, pp. 11–16 (in Russian).
6. Belokurskii M. S. Irregular solutions of linear almost periodic differential systems in resonant case. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 12–18 (in Russian).
7. Pontryagin L. S. *Ordinary differential equations*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 331 p. (in Russian).

Информация об авторе

Белокурский Максим Сергеевич – старший преподаватель. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: drakonsm@ya.ru.

Information about the author

Belokursky Maksim Sergeevich – Senior Lecturer. Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: drakonsm@ya.ru.