

А. Л. ЗЕЛЬМАНОВ

ОРТОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА МОНАДНОГО ФОРМАЛИЗМА И ЕЕ ОТНОШЕНИЕ К ХРОНОМЕТРИЧЕСКИМ И КИНЕМЕТРИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТАМ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 10 XII 1975)

1. Аппарат хронометрически инвариантных (х. и.) величин (¹, ²) допускает общековариантное обобщение (³), включающее в себя такое же обобщение аппарата кинеметрически инвариантных (к. и.) величин (⁴, ⁵) и в дальнейшем называемое ортометрической формой (о. ф.) монадного формализма (м. ф.). Для аппаратов х. и. и к. и. величин существен фиксированный выбор линий времени $x^i = \text{const}$, $i=1, 2, 3$, или соответственно пространственных сечений $x^0 = \text{const}$. Для о. ф. м. ф. существен фиксированный выбор поля монад — мировых векторов (b_α или b^α) постоянной длины ($b_\alpha b^\alpha = \text{const}$), вообще говоря, временно-подобных. Греческие значки пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — лишь 1, 2, 3. В системах координат, в которых $b^i = 0$ или $b_i = 0$, монады соответственно касательны к линиям времени или ортогональны к пространственным сечениям.

Пусть поле монад задано. Будем называть анометрическими (а.) величины $Q_{\mu \dots}^{\nu \dots}$, имеющие координатные значки, свертывание по которым с монадами дает произведения, не равные тождественно нулю ($b^\mu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} \neq 0$ или $b_\nu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} \neq 0$). Величины, не имеющие таких значков (так что $b^\mu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = 0$,

$b_\nu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = 0$), включая инварианты, будем называть ортометрическими (о.).

(Мировой фундаментальный определитель $g = |g_{\mu\nu}|$ является составляющей а. тензора 8 ранга.) В о.ф.м.ф. преимущественны о. тензоры и другие о. величины. В качестве существенных составляющих любой о. величины можно принять ее пространственные составляющие, остальные составляющие выражаются через них (или обращаются в ноль) в силу условий ортометричности $b^\mu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = 0$, $b_\nu Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = 0$. При $b^i = 0$ или $b_i = 0$ пространственные составляющие о. тензора образуют х.и. или соответственно к.и. тензор, и наоборот: х.и. или к.и. тензор может быть дополнен до о. тензора. Таким образом, о. тензоры можно рассматривать как четырехмерное представление или обобщение трехмерных х.и. и к.и. тензоров. Определим о. пространство, вообще говоря неголономное, как совокупность локальных трехмерных пространств, ортогональных к монадам. При $b^i = 0$ оно совпадает с пространством отсчета (¹, ², ⁴), при $b_i = 0$ — с пространством сечений (⁴, ⁵).

Условимся, что x^α вещественны, $x^0 = ct$, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$; $g_{\mu\nu}$ и другие дифференцируемые величины непрерывны по x^α вместе со своими первыми и вторыми производными по ним; $g_{00} \neq 0$, $g^{00} \neq 0$, $g \neq 0$ ($g < 0$). В отличие от прежних публикаций автора примем сигнатуру $(- + + +)$ вместо $(+ - - -)$, а тензор энергии и импульса $T^{\mu\nu}$ выберем так, чтобы его след при скорости звука $v < c/\sqrt{3}$ был отрицателен. О. величины будем называть и обозначать так же (но с заменой латинских значков греческими), как и х.и. и к.и. величины, обобщением которых они являются.

2. Положим $b^\alpha = i dx^\alpha / ds$; тогда $b_\alpha b^\alpha = -1$ и составляющие временно-подобных ($ds^2 < 0$) монад вещественны. Для них примем $b^0 > 0$; тогда $b_0 < 0$. Для о. фундаментального тензора $h_{\mu\nu}$ имеем $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + b_\mu b_\nu$, $h_\mu^\nu = g_\mu^\nu + b_\mu b^\nu$, $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + b^\mu b^\nu$, $h_\nu^\nu = 3$; $|h_{\mu\nu}| = 0$, $|h_\mu^\nu| = 0$, $|h^{\mu\nu}| = 0$. Свертывание о. величины с $h_{\mu\nu}$, h_μ^ν , $h^{\mu\nu}$ равносильно ее свертыванию с $g_{\mu\nu}$, g_μ^ν , $g^{\mu\nu}$. Если $Q_{\mu \dots}^{\nu \dots \sigma}$ — а. тен-

зор ранга n , то $T_{\alpha \dots}^{\beta \dots} = b_{\sigma \dots} b^{\rho \dots} h_{\alpha \dots}^{\mu \dots} h_{\nu \dots}^{\beta \dots} Q_{\mu \dots \rho}^{\nu \dots \sigma} - 0$. тензор ранга $n-m$,

где m — число значков, по которым а. тензор свернут с монадами (по остальным $n-m$ значкам а. тензор свернут с о. фундаментальным тензором). Для о. элементарного промежутка времени $d\tau$ и о. элементарной длины du имеем $c d\tau = -b_{\alpha} dx^{\alpha}$, $du^2 = h_{\mu\nu}^{\circ} dx^{\mu} dx^{\nu} = h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, где $^{\circ} dx^{\alpha} = h_{\epsilon}^{\alpha} dx^{\epsilon} = dx^{\alpha} - b^{\alpha} c d\tau$. Для фиксированных точек о. пространства находим $^{\circ} dx^{\alpha} = 0$. Их координаты x^i , вообще говоря, зависят от x^0 . Для о. скорости движущихся точек получаем $v^{\alpha} = ^{\circ} dx^{\alpha} / d\tau = dx^{\alpha} / d\tau - c b^{\alpha}$.

Пусть $d_{\mu\nu} = 1/2 (\square_{\mu} b_{\nu} + \square_{\nu} b_{\mu})$, $a_{\mu\nu} = 1/2 (\square_{\mu} b_{\nu} - \square_{\nu} b_{\mu}) = 1/2 (\partial_{\mu} b_{\nu} - \partial_{\nu} b_{\mu})$, где $\square_{\alpha}$ — оператор четырехмерного ковариантного дифференцирования. Очевидно, $(d_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}) b^{\nu} = 0$, $d_{\mu\nu} b^{\mu} b^{\nu} = 0$, $h^{\mu\nu} d_{\mu\nu} = d_{\nu}^{\nu}$.

Для о. вектора гравитационно-инерциальной силы F_{ν} , о. тензоров угловой скорости вращения о. пространства $A_{\mu\nu}$, скоростей его деформации $D_{\mu\nu}$ и $D = D_{\nu}^{\nu}$ имеем $F_{\nu} = -c^2 b^{\mu} (d_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}) = -2c^2 b^{\mu} d_{\mu\nu} = -2c^2 b^{\mu} a_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu} = c h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} a_{\alpha\beta}$,

$D_{\mu\nu} = c h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} d_{\alpha\beta}$, $D_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} = c h_{\mu}^{\alpha} (d_{\alpha\nu} + a_{\alpha\nu})$, $D = c d_{\nu}^{\nu}$. Тожественное выполнение равенств $A_{\mu\nu} = 0$ в четырехмерной области необходимо и достаточно для существования систем координат, в которых в ней, при заданном поле монад, всюду $b_i = 0$.

Пусть $\delta_{\lambda\mu\nu\xi}$ и $\delta^{\lambda\mu\nu\xi}$ — дискриминантные тензоры. Введем о. дискриминантные тензоры: $\epsilon_{\mu\nu\xi} = h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\zeta} h_{\xi}^{\eta} b^{\lambda} \delta_{\lambda\epsilon\zeta\eta} = b^{\lambda} \delta_{\lambda\mu\nu\xi}$, $\epsilon^{\mu\nu\xi} = h_{\epsilon}^{\mu} h_{\zeta}^{\nu} h_{\eta}^{\xi} b_{\lambda} \delta^{\lambda\epsilon\zeta\eta} = b_{\lambda} \delta^{\lambda\mu\nu\xi}$.

Для объема V элементарного параллелепипеда, построенного на о. векторах $^{\circ} dx_{(1)}^{\mu}$, $^{\circ} dx_{(2)}^{\nu}$, $^{\circ} dx_{(3)}^{\sigma}$, имеем: $V = \epsilon_{\mu\nu\sigma} ^{\circ} dS^{\mu\nu\sigma}$, где $^{\circ} dS^{\mu\nu\sigma}$ — совершенно антисимметричная часть произведения $^{\circ} dx_{(1)}^{\mu} \cdot ^{\circ} dx_{(2)}^{\nu} \cdot ^{\circ} dx_{(3)}^{\sigma}$.

3. Будем отмечать о. (т. е. не нарушающие о. характера дифференцируемых величин) дифференциальные операторы так же, как и о. обобщение дифференциалов координат (кружком). Перечислим о. операторы, представляющие собой обобщение одноименных х.и. и к.и. операторов, для о. тензоров $Q_{\mu \dots}^{\nu \dots}$. Операторы простого и ковариантного дифференцирования по координатам примем в виде

$$^{\circ} \partial_{\alpha} Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = h_{\mu}^{\epsilon} \dots h_{\xi}^{\nu} \dots h_{\alpha}^{\sigma} \partial_{\sigma} Q_{\epsilon \dots}^{\xi \dots}; \quad (1)$$

$$^{\circ} \nabla_{\alpha} Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = h_{\mu}^{\epsilon} \dots h_{\xi}^{\nu} \dots h_{\alpha}^{\sigma} \square_{\sigma} Q_{\epsilon \dots}^{\xi \dots} = ^{\circ} \partial_{\alpha} Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} - \Delta_{\alpha\mu}^{\epsilon} Q_{\epsilon \dots}^{\nu \dots} - \dots + \Delta_{\alpha\xi}^{\nu} Q_{\mu \dots}^{\xi \dots} + \dots, \quad (2)$$

где $\Delta_{\mu\nu}^{\tau} = h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\zeta} h_{\tau}^{\eta} \Gamma_{\epsilon\zeta\eta}^{\tau} = h^{\tau\epsilon} \Delta_{\mu\nu\epsilon}^{\tau}$, $\Delta_{\mu\nu\epsilon}^{\tau} = h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\zeta} h_{\epsilon}^{\lambda} \Gamma_{\zeta\lambda\epsilon}^{\tau} = 1/2 (^{\circ} \partial_{\mu} h_{\nu\epsilon} + ^{\circ} \partial_{\nu} h_{\mu\epsilon} - ^{\circ} \partial_{\epsilon} h_{\mu\nu})$; $\Gamma_{\epsilon\zeta\lambda}^{\tau}$ и $\Gamma_{\epsilon\zeta}^{\sigma}$ — обычные мировые символы Кристоффеля, $\Delta_{\mu\nu\epsilon}^{\tau}$ и $\Delta_{\mu\nu}^{\tau}$ — о. символы Кристоффеля.

Операторы простого и абсолютного дифференцирования по времени имеют вид

$$^{\circ} \partial_t Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = c h_{\mu}^{\epsilon} \dots h_{\xi}^{\nu} \dots (b^{\sigma} \square_{\sigma} Q_{\epsilon \dots}^{\xi \dots} + Q_{\eta \dots}^{\xi \dots} \square_{\epsilon} b^{\eta} + \dots - Q_{\epsilon \dots}^{\eta \dots} \square_{\eta} b^{\epsilon} - \dots); \quad (3)$$

$$^{\circ} \nabla_t Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} = c h_{\mu}^{\epsilon} \dots h_{\xi}^{\nu} \dots b^{\sigma} \square_{\sigma} Q_{\epsilon \dots}^{\xi \dots} = ^{\circ} \partial_t Q_{\mu \dots}^{\nu \dots} - (D_{\mu}^{\eta} + A_{\mu}^{\eta}) Q_{\eta \dots}^{\nu \dots} - \dots + (D_{\nu}^{\eta} + A_{\nu}^{\eta}) Q_{\mu \dots}^{\eta \dots} + \dots \quad (4)$$

В (3) ковариантные производные можно заменить простыми. Сохраняя правило Лейбница, определим о. операторы $^{\circ} \partial_t$ и $^{\circ} \partial_{\alpha}$ также для о. символов Кристоффеля:

$$^{\circ} \partial_t \Delta_{\beta\mu}^{\nu} = c h_{\xi}^{\nu} h_{\mu}^{\rho} \{ b^{\sigma} \partial_{\sigma} \Delta_{\rho\epsilon}^{\xi} + \Delta_{\eta\epsilon}^{\xi} \partial_{\rho} b^{\eta} + \Delta_{\eta\epsilon}^{\xi} \partial_{\sigma} b^{\eta} - \Delta_{\rho\epsilon}^{\xi} \partial_{\eta} b^{\xi} - \partial_{\rho} \partial_{\epsilon} b^{\xi} - c^{-2} (F_{\rho} \partial_{\epsilon}^{\xi} b^{\xi} + F_{\epsilon} \partial_{\rho} b^{\xi}) \}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \circ \partial_\alpha \Delta_{\beta\mu}^\nu = h_\epsilon^\epsilon h_\mu^\mu h_\alpha^\alpha \{ \partial_\sigma \Delta_{\rho\epsilon}^\epsilon + \partial_\sigma b_\rho \cdot \partial_\epsilon b^\epsilon + \partial_\sigma b_\epsilon \cdot \partial_\rho b^\epsilon + \\ & + k [(\partial_\rho b_\sigma + \partial_\sigma b_\rho) \partial_\epsilon b^\epsilon + (\partial_\epsilon b_\sigma + \partial_\sigma b_\epsilon) \partial_\rho b^\epsilon + (\partial_\rho b_\epsilon + \partial_\epsilon b_\rho) \partial_\sigma b^\epsilon] \} \end{aligned} \quad (6)$$

при любом фиксированном выборе k . В результате действия операторов (2)–(5) получаем о. тензоры.

$$\begin{aligned} & \text{Очевидно, } \circ \partial_\alpha h_\mu^\nu = 0; \quad \circ \nabla_\alpha h_\mu^\nu = 0, \quad \circ \nabla_\alpha h_\mu = 0, \quad \circ \nabla_\alpha h^{\mu\nu} = 0; \quad \circ \nabla_\alpha \varepsilon_{\mu\nu\sigma} = 0, \\ & \circ \nabla_\alpha \varepsilon^{\mu\nu\sigma} = 0; \quad \circ \partial_t h_\mu^\nu = 0; \quad \circ \nabla_t h_{\mu\nu} = 0, \quad \circ \nabla_t h_\mu^\nu = 0, \quad \circ \nabla_t h^{\mu\nu} = 0; \quad \circ \nabla_t \varepsilon_{\mu\nu\sigma} = 0, \quad \circ \nabla_t \varepsilon^{\mu\nu\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$D_{\mu\nu} = 1/2 \circ \partial_t h_{\mu\nu}, \quad D^{\mu\nu} = -1/2 \circ \partial_t h^{\mu\nu}, \quad \circ \partial_t \varepsilon_{\mu\nu\sigma} = D \varepsilon_{\mu\nu\sigma}, \quad \circ \partial_t \varepsilon^{\mu\nu\sigma} = -D \varepsilon^{\mu\nu\sigma}. \quad (7)$$

При фиксированных векторах $\circ dx_{(i)}^{\mu, \nu}$ (см. п. 2) находим $\circ \partial_t V = DV$.

Введем полные производные (п. п.) по времени (вр.): о. п. п. по вр.

$$\begin{aligned} & \circ dQ_{\mu\nu}^{\dots}/dt = \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots} + \circ \partial_\sigma Q_{\mu\nu}^{\dots} \cdot \circ dx^\sigma/dt \text{ и ковариантную о. п. п. по вр. } \circ dQ_{\mu\nu}^{\dots}/dt + \\ & + (-\Delta_{\sigma\mu}^\epsilon Q_{\epsilon\nu}^{\dots} - \dots + \Delta_{\sigma\nu}^\epsilon Q_{\mu\epsilon}^{\dots} + \dots) \circ dx^\sigma/dt = \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots} + \circ \nabla_\sigma Q_{\mu\nu}^{\dots} \cdot \circ dx^\sigma/dt. \end{aligned}$$

4. Отметим тождества

$$\circ \partial_t A_{\mu\nu} + 1/2 (\circ \nabla_\mu F_\nu - \circ \nabla_\nu F_\mu) = 0; \quad (8)$$

$$\circ \nabla_\mu A_{\nu\sigma} + \circ \nabla_\nu A_{\sigma\mu} + \circ \nabla_\sigma A_{\mu\nu} + c^{-2} (F_\mu A_{\nu\sigma} + F_\nu A_{\sigma\mu} + F_\sigma A_{\mu\nu}) = 0. \quad (9)$$

Ковариантные производные в (8) и (9) можно заменить простыми. Левые части (8) и (9) связаны тождественным соотношением. Далее

$$\circ \partial_t \Delta_{\mu\sigma}^\nu = C_{\mu\sigma}^\nu, \quad (10)$$

$$C_{\mu\sigma}^\nu = (\circ \nabla_\mu - c^{-2} F_\mu) D_\sigma^\nu + (\circ \nabla_\sigma - c^{-2} F_\sigma) D_\mu^\nu - (\circ \nabla^\nu - c^{-2} F^\nu) D_{\mu\sigma}.$$

Приведем основные коммутационные соотношения:

$$(\circ \nabla_\alpha \circ \partial_t - \circ \partial_t \circ \nabla_\alpha) Q_{\mu\nu}^{\dots} = c^{-2} F_\alpha \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots} + C_{\alpha\mu}^\epsilon Q_{\epsilon\nu}^{\dots} + \dots - C_{\alpha\nu}^\epsilon Q_{\mu\epsilon}^{\dots} - \dots, \quad (11)$$

$$(\circ \partial_\alpha \circ \partial_t - \circ \partial_t \circ \partial_\alpha) Q_{\mu\nu}^{\dots} = c^{-2} F_\alpha \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots}; \quad (12)$$

$$(\circ \partial_\alpha \circ \partial_\beta - \circ \partial_\beta \circ \partial_\alpha) Q_{\mu\nu}^{\dots} = 2c^{-2} A_{\alpha\beta} \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots}; \quad (13)$$

$$(\circ \nabla_\alpha \circ \nabla_\beta - \circ \nabla_\beta \circ \nabla_\alpha) Q_{\mu\nu}^{\dots} = 2c^{-2} A_{\alpha\beta} \circ \partial_t Q_{\mu\nu}^{\dots} + H_{\mu\beta\alpha}^{\dots\lambda} Q_{\lambda\nu}^{\dots} + \dots - H_{\lambda\beta\alpha}^{\dots\nu} Q_{\mu\lambda}^{\dots} - \dots; \quad (14)$$

$$H_{\mu\beta\alpha}^{\dots\nu} = \circ \partial_\beta \Delta_{\mu\alpha}^\nu - \circ \partial_\alpha \Delta_{\mu\beta}^\nu + \Delta_{\mu\alpha}^\epsilon \Delta_{\beta\epsilon}^\nu - \Delta_{\mu\beta}^\epsilon \Delta_{\alpha\epsilon}^\nu. \quad (15)$$

Очевидно, $H_{\mu\beta\alpha}^{\dots\nu}$ — о. тензор. Соотношения (12) и (13) можно распространить и на петензорные о. величины, прежде всего на о. символы Кристоффеля, превратив (12) и (13) в определения операторов. Пользуясь (12), получим тождества

$$\circ \partial_t H_{\mu\beta\alpha}^{\dots\nu} = (\circ \nabla_\beta - c^{-2} F_\beta) C_{\alpha\mu}^\nu - (\circ \nabla_\alpha - c^{-2} F_\alpha) C_{\beta\mu}^\nu. \quad (16)$$

Введем $C_{\mu\beta\alpha\nu} = 1/4 (H_{\mu\beta\alpha\nu} - H_{\nu\beta\alpha\mu} + H_{\beta\mu\nu\alpha} - H_{\alpha\mu\nu\beta})$, $C_{\mu\beta} = C_{\mu\beta\alpha}^{\dots\alpha}$ и $C = C_\beta^\beta$. Если $A_{\rho\sigma} = 0$ или $D_{\rho\sigma} = 0$, то $H_{\mu\beta\alpha\nu} = C_{\mu\beta\alpha\nu}$.

Дополняя х.и. тензоры до о. тензоров, легко показать, что общековариантные обобщения х.и. тензорных уравнений можно получить заменой х.и. тензорных величин и операторов одноименными о. тензорными величинами и операторами.

5. Пусть m_0 — масса покоя частицы; $P^\alpha = m_0 i dx^\alpha/ds$ и Ξ^α — обычные мировые векторы импульса и силы; E — о. энергия частицы; p^α — о. импульс; ξ^α — о. негравитационная сила. Тогда $c^2 b_\beta P^\beta = -E = -mc^2$, $ch_\beta^\alpha P^\beta = p^\alpha = mv^\alpha$, о. масса $m = m_0 (1 - v_\epsilon v^\epsilon/c^2)^{-1/2}$, $c^3 b_\beta \Xi^\beta = v_\beta \xi^\beta (1 - v_\epsilon v^\epsilon/c^2)^{-1/2}$, $c^2 h_\beta^\alpha \Xi^\beta = -\xi^\alpha (1 - v_\epsilon v^\epsilon/c^2)^{-1/2}$. Очевидно, $E^2/c^2 - p_\epsilon p^\epsilon = m_0^2 c^2$.

При постоянной m_0 уравнения движения принимают вид

$${}^\circ dE/dt + m D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}} - m F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}} = \xi_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}}; \quad (17)$$

$${}^\circ dp^{\sigma}/dt + \Delta_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} p^{\sigma} v^{\frac{1}{2}} + 2(D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma} + A_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma}) p^{\sigma} - m F^{\sigma} = \xi^{\sigma}. \quad (18)$$

Перейдем к распространению света в пустоте. Пусть K^{σ} — обычный мировой волновой вектор, ω — о. циклическая частота. Тогда $cb_{\beta} K^{\beta} = -\omega$, $ch_{\beta}^{\sigma} K^{\beta} = \omega \alpha^{\sigma}$; $\alpha^{\sigma} = {}^\circ dx^{\sigma}/du$, $du = c d\tau$. Имеем

$${}^\circ d\omega/dt + \omega (D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \alpha^{\sigma} \alpha^{\frac{1}{2}} - c^{-1} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \alpha^{\sigma}) = 0; \quad (19)$$

$${}^\circ d(\omega \alpha^{\sigma})/dt + \omega [c \Delta_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \alpha^{\sigma} \alpha^{\frac{1}{2}} + 2(D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma} + A_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma}) \alpha^{\sigma} - c^{-1} F^{\sigma}] = 0. \quad (20)$$

6. Пусть $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии и импульса; ρ — о. плотность массы; J^{α} — о. плотность потока массы, равная плотности импульса (ρc^2 — плотность энергии, $J^{\alpha} c^2$ — плотность потока энергии); $U^{\alpha\beta}$ — о. плотность потока импульса, $U = U_{\beta}^{\beta}$. Тогда $b_{\mu} b_{\nu} T^{\mu\nu} = \rho$, $ch_{\mu}^{\alpha} b_{\nu} T^{\mu\nu} = -J^{\alpha}$, $c^2 h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} T^{\mu\nu} = U^{\alpha\beta}$.

Закон энергии и импульса принимает вид

$$({}^\circ \partial_t + D) \rho + c^{-2} D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} U^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + ({}^\circ \nabla_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - c^{-2} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) J^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - c^{-2} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} J^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (21)$$

$$({}^\circ \partial_t + D) J^{\sigma} + 2(D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma} + A_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\sigma}) J^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + ({}^\circ \nabla_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - c^{-2} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) U^{\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \rho F^{\sigma} = 0. \quad (22)$$

Уравнения поля тяготения Эйнштейна, разрешенные относительно свертнутого мирового тензора кривизны, могут быть представлены в виде

$${}^\circ \partial_t D + D_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} D^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - A_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} A^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + ({}^\circ \nabla_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - c^{-2} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) F^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = -(\kappa/2) (\rho c^2 + U) + \Lambda c^2; \quad (23)$$

$${}^\circ \nabla_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} (h^{\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}} D - D^{\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - A^{\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) + 2c^{-2} F_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} A^{\sigma\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \kappa J^{\sigma}; \quad (24)$$

$${}^\circ \partial_t D_{\mu\nu} - (D_{\mu\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + A_{\mu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) (D_{\nu}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + A_{\nu}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) + DD_{\mu\nu} - D_{\mu\varepsilon^{\frac{1}{2}}} D_{\nu}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + 3A_{\mu\varepsilon^{\frac{1}{2}}} A_{\nu}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ 1/2 ({}^\circ \nabla_{\mu} F_{\nu} + {}^\circ \nabla_{\nu} F_{\mu}) - c^{-2} F_{\mu} F_{\nu} - c^2 C_{\mu\nu} = (\kappa/2) (\rho c^2 h_{\mu\nu} + 2U_{\mu\nu} - U h_{\mu\nu}) + \Lambda c^2 h_{\mu\nu}, \quad (25)$$

где κ — постоянная тяготения Эйнштейна, а Λ — космическая постоянная.

7. Пусть $G_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$ — мировой тензор Римана — Кристоффеля,

$$C_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta}.$$

Введем о. тензоры: $X_{\alpha\beta} = c^2 G_{\mu\nu\sigma\rho} b^{\mu} b^{\nu} h_{\alpha}^{\sigma} h_{\beta}^{\rho} = c^2 G_{\mu\nu\alpha\beta} b^{\mu} b^{\nu}$, $Y_{\alpha\beta\varepsilon} = c G_{\mu\nu\sigma\rho} b^{\mu} h_{\alpha}^{\nu} h_{\beta}^{\sigma} h_{\varepsilon}^{\rho} = c G_{\mu\nu\sigma\varepsilon} b^{\mu} h_{\alpha}^{\nu} h_{\beta}^{\sigma}$, $Z_{\alpha\beta\varepsilon\zeta} = -c^2 G_{\mu\nu\sigma\rho} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} h_{\varepsilon}^{\sigma} h_{\zeta}^{\rho}$. Тогда

$$X_{\alpha\beta} = {}^\circ \partial_t D_{\alpha\beta} - (D_{\alpha\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + A_{\alpha\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) (D_{\beta}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + A_{\beta}^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) + 1/2 ({}^\circ \nabla_{\alpha} F_{\beta} + {}^\circ \nabla_{\beta} F_{\alpha}) - c^{-2} F_{\alpha} F_{\beta}; \quad (26)$$

$$Y_{\alpha\beta\varepsilon} = {}^\circ \nabla_{\alpha} (D_{\beta\varepsilon} + A_{\beta\varepsilon}) - {}^\circ \nabla_{\beta} (D_{\alpha\varepsilon} + A_{\alpha\varepsilon}) + 2c^{-2} A_{\alpha\beta} F_{\varepsilon}; \quad (27)$$

$$Z_{\alpha\beta\varepsilon\zeta} = D_{\alpha\beta} D_{\varepsilon\zeta} - D_{\alpha\varepsilon} D_{\beta\zeta} - A_{\alpha\beta} A_{\varepsilon\zeta} + A_{\alpha\varepsilon} A_{\beta\zeta} + 2A_{\beta\varepsilon} A_{\alpha\zeta} - c^2 C_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}. \quad (28)$$

По существу о.ф.м.ф. — вариант применения теории неголономных (вообще говоря) V_n^m в V_n к пространству-времени ($m=3$, $n=4$). От других аналогичных вариантов (см. особенно ⁽⁶⁾) он тем прежде всего и отличается, что представляет собой общековариантное обобщение аппаратов Х.И. и К.И. величин.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступило
20 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Зельманов, ДАН, т. 107, № 6, 815 (1956). ² А. Л. Зельманов, Тр. VI совещ. по вопросам космогонии, 1959, стр. 144. ³ А. Л. Зельманов, Проблемы гравитации. Тез. докл. II сов. гравитационной конфер., Тбилиси, 1965, стр. 54; Тез. докл. V Международной конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968, стр. 115; Abstr. V Intern. Conf. Gravitation and Theory of Relat., Tbilisi, 1968, p. 102. ⁴ А. Л. Зельманов, ДАН, т. 124, № 5, 1030 (1959). ⁵ А. Л. Зельманов, ДАН, т. 209, № 4, 822 (1973). ⁶ C. Cattaneo, Coll. intern. Centre nat. rech. sci. Paris, 1967, № 170, 1969, p. 277.