

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, И. Н. ЗЛАТИНА

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком В. В. Повожиловым 8 XII 1975)

При решении статических задач теории упругости важную роль играет представление решения уравнений Ляме в форме Папковича — Нейбера ⁽¹⁻⁴⁾:

$$2Gu = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\Phi, \quad (1)$$

где u — вектор перемещений, Φ_i , $i=0, 1, 2, 3$, — произвольные гармонические функции, $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 = \Phi_0 + r \cdot \Phi$, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига.

Для решения динамических проблем, в частности, задач об установившихся гармонических колебаниях, применяют, как правило, представление вектора перемещений через скалярный и векторный потенциалы φ и ψ ^(5, 6) *:

$$2Gu = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi, \quad (2)$$

где в случае установившихся колебаний φ и ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0; \quad (3)$$

$$\Delta\psi + k_2^2\psi = 0, \quad (4)$$

причем

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{2G} \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}, \quad (5)$$

где ρ — плотность, ω — частота колебаний.

Такое представление решения, как нетрудно видеть, не переходит, однако, в общее представление решения статической задачи в пределе $\omega \rightarrow 0$.

Интересным является разыскание иных по сравнению с (2) представлений решения уравнений установившихся упругих колебаний, которые были бы в определенном смысле обобщением статического представления Папковича — Нейбера.

Уравнения установившихся трехмерных колебаний имеет вид

$$\Delta u + (1-2\nu)^{-1} \text{grad div } u + k_2^2 u = 0. \quad (6)$$

Отправляясь от формы представления решения (1), не конкретизируя пока вид функции F , получаем следующий результат:

Теорема 1. Если вектор u представлен в виде (1), где F и Φ — некоторые достаточно гладкие функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\Delta F + k_1^2 F = 2 \text{div } \Phi + 2(1-2\nu)f; \quad (7)$$

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = \text{grad } f, \quad (8)$$

f — произвольная функция, то u является решением уравнения (6).

* Некоторые другие представления для динамического случая получены в работах ^(7, 8).

Действительно, подставляя (1) в уравнение движения (6), обнаруживаем, что функции F и Φ должны удовлетворять равенству

$$\text{grad} [-(\Delta F + k_1^2 F) + 2 \text{div } \Phi] + 2(1-2\nu)(\Delta \Phi + k_2^2 \Phi) = 0, \quad (9)$$

которое, очевидно, и выполняется в силу (7) и (8).

Пользуясь этим вспомогательным результатом, можно получать различные представления для вектора перемещений.

Мы далее будем считать, что функция F и вектор Φ связаны, как и в статическом представлении Папковича — Нейбера, соотношением

$$F = \Phi_0 + \mathbf{r} \cdot \Phi, \quad (10)$$

где Φ_0 — произвольная функция.

Рассмотрим далее два случая:

1) Пусть $f=0$. Тогда уравнения (7) и (8) принимают вид

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0; \quad (11)$$

$$\Delta \Phi_0 + k_1^2 \Phi_0 = (k_2^2 - k_1^2) \mathbf{r} \cdot \Phi \quad (12)$$

и имеет место

Теорема 2. *Справедливо общее представление решения уравнения установившихся колебаний (6) в виде (1), где $F = \Phi_0 + \mathbf{r} \cdot \Phi$, функции Φ_0 и Φ удовлетворяют системе уравнений (11), (12). Именно, всякий вектор $\mathbf{u}$, представленный в таком виде, удовлетворяет уравнению (6), и обратно, всякое решение уравнения (6) может быть представлено в виде (1), (10) — (12).*

Доказательство. Прямое утверждение теоремы 2 следует с очевидностью из теоремы 1 при $f=0$.

Пусть теперь $\mathbf{u}$ — произвольное решение уравнения (6). Как и любой гладкий вектор, его можно представить, в силу теоремы Гельмгольца, в виде (2), с некоторыми определенными φ и Ψ , удовлетворяющими уравнениям (3) и (4). Положим теперь

$$\varphi = -(\Phi_0 + \mathbf{r} \cdot \Phi) + V; \quad (13)$$

$$\text{grad } V + \text{rot } \Psi = 4(1-\nu) \Phi, \quad (14)$$

так что

$$\Phi = \frac{1}{4(1-\nu)} [\text{grad } V + \text{rot } \Psi]; \quad (15)$$

$$\Phi_0 = -\varphi - \mathbf{r} \cdot \Phi + V, \quad (16)$$

тогда представление (2) принимает вид (1), и остается показать, что можно так определить функцию V , чтобы выполнялись уравнения (11) и (12).

Из (15), ввиду (4), следует равенство

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad} [\Delta V + k_2^2 V]. \quad (17)$$

Принимая во внимание (17) и равенство

$$\text{div } \Phi = \frac{1}{4(1-\nu)} \Delta V,$$

из (16) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 + k_1^2 \Phi_0 &= (k_1^2 - k_2^2) \mathbf{r} \cdot \Phi + \Delta V + k_1^2 V - \\ &- \frac{1}{4(1-\nu)} \mathbf{r} \cdot \text{grad} (\Delta V + k_2^2 V) - \frac{1}{2(1-\nu)} \Delta V, \end{aligned}$$

что, в силу (5), можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 + k_1^2 \Phi_0 &= (k_2^2 - k_1^2) \mathbf{r} \cdot \Phi + \\ &+ \frac{1}{4(1-\nu)} [2(1-2\nu)(\Delta V + k_2^2 V) - \mathbf{r} \cdot \text{grad} (\Delta V + k_2^2 V)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Если выбрать теперь V так, чтобы выполнялось уравнение

$$\Delta V + k_2^2 V = 0, \quad (19)$$

то (17) и (18) переходят соответственно в (11) и (12).

Теорема доказана.

Полученное представление, как нетрудно видеть, переходит в пределе $\omega \rightarrow 0$ в представление Папковича — Нейбера,

2) Выберем теперь функцию f следующим образом:

$$f = -\frac{k_2^2 - k_1^2}{2(1-2\nu)} \mathbf{r} \cdot \Phi. \quad (20)$$

Тогда уравнения (7) и (8), с учетом (10), принимают вид

$$\Delta \Phi_0 + k_1^2 \Phi_0 = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2(1-2\nu)} \mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \Phi); \quad (21)$$

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = -\frac{k_2^2 - k_1^2}{2(1-2\nu)} \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \Phi) \quad (22)$$

и имеет место

Теорема 3. Справедливо общее представление решения уравнения установившихся колебаний (6) в виде (1), где $F = \Phi_0 + \mathbf{r} \cdot \Phi$, а функции Φ_0 и Φ удовлетворяют системе уравнений (21), (22).

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2 с той лишь разницей, что функцию следует подчинить вместо (19) уравнению

$$\begin{aligned} \Delta V + k_2^2 V &= -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} (k_2^2 - k_1^2) \mathbf{r} \cdot \Phi = \\ &= -\frac{k_2^2 - k_1^2}{2(1-2\nu)} \mathbf{r} \cdot [\text{grad } V + \text{rot } \Psi]. \end{aligned} \quad (23)$$

Это представление тоже переходит в представление Папковича — Нейбера в пределе $\omega \rightarrow 0$.

В оба рассмотренные представления вектора перемещений (теоремы 2 и 3) входят, как и в представление Папковича — Нейбера, четыре скалярные функции. По этой причине следует ожидать, что при решении конкретных задач в выборе этих функций будет существовать некоторый произвол. Тем не менее ясно, что, в отличие от представления Папковича — Нейбера (², ³), произвольно задавать любую из функций (например, полагать равной нулю), вообще говоря, нельзя.

С другой стороны, в представлениях теорем 2 и 3 одну из функций можно, по-видимому, выбирать и произвольно, в том числе полагать равной нулю, но так, чтобы при этом каждая компонента вектора перемещений и тензора напряжений существенным образом зависела от обоих волновых чисел k_1 и k_2 .

Заметим, что, хотя каждая из четырех скалярных функций и не удовлетворяет своему однородному уравнению, это обстоятельство при решении многих задач не является принципиальным затруднением. В частности, оно не мешает применению интегральных преобразований (например, преобразования Фурье). Кроме того, когда конфигурация рассматриваемой области позволяет решать задачу в криволинейных ортогональных координатах таких, где $r = |\mathbf{r}|$ является одной из координат (сферические, сферокопические, полярные), в представлениях теоремы 2 и 3 может оказаться удобным использование криволинейных компонент вектора Φ . При этом, как нетрудно видеть, уравнения, которым удовлетворяют Φ_0 и три компоненты Φ , оказываются «перепутанными» лишь за счет r -компоненты вектора Φ —

функции Φ_r . Например, в плоском случае в полярных координатах для функций Φ_0 , Φ_r и Φ_φ имеем (теорема 2)

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_0 + k_1^2 \Phi_0 &= (k_2^2 - k_1^2) r \Phi_r, \\ \Delta \Phi_r + (k_2^2 - r^{-2}) \Phi_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \Delta \Phi_\varphi + (k_2^2 - r^{-2}) \Phi_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Полученные представления имеют место и в случае неустановившихся процессов, причем в уравнениях, которым удовлетворяют искомые потенциалы, следует заменить k_1^2 и k_2^2 на операторы $\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и $\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ соответственно, где c_1 и c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн.

Авторы благодарят Я. С. Уфлянда и В. А. Пупырева за полезные обсуждения работ.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
7 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ П. Ф. Папкович, Теория упругости, Оборонгиз, 1939. ² Г. Нейбер, Концентрация напряжений, Гостехиздат, 1947. ³ Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, Изд-во АН СССР, 1949. ⁴ Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, «Наука», 1968. ⁵ Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937. ⁶ Л. И. Слепян, Нестационарные упругие волны, Судостроение, 1972. ⁷ И. С. Аржаных, Общие решения динамики теории упругости и симметричные интегральные уравнения краевых задач. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, № 4, Ташкент, Изд-во «ФАН», 1974. ⁸ А. Ляв, Математическая теория упругости, М.—Л., ОНТИ, 1935.