

Е. Н. ЗУБОВ

# О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА С ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ УРОВНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕГРАЛА БЕРНУЛЛИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 17 IX 1975)

Дана полная классификация пространственных установившихся течений с прямыми линиями уровня при наличии интеграла Бернулли.

Установлено, что при  $\gamma=2$  существует класс сверхзвуковых вихревых течений, зависящих от двух произвольных функций одной переменной.

Для случая  $\gamma=2$  дан пример точного решения, представляющего сверхзвуковое вихревое коническое течение.

1. В работе (1) дана полная классификация неустановившихся плоских течений политропного газа, имеющих прямые линии уровня параметров течения. В настоящей заметке проведено аналогичное исследование для случая пространственных установившихся течений при наличии интеграла Бернулли. Более сложная структура уравнений, фигурирующих в этом случае, намного усложняет рассмотрение и требует другого метода исследования. Уравнения гидродинамики для этого случая имеют вид:

уравнения Эйлера

$$\sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \kappa \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2; \quad (1)$$

уравнение неразрывности

$$\kappa \theta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 0; \quad (2)$$

интеграл Бернулли

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \kappa \theta^2 = \lambda^2 = \text{const}, \quad (3)$$

где  $\kappa = (\gamma - 1)/2$ ;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\theta = (1/\kappa)c$ ,  $c$  — скорость звука. Будем считать, что  $u_1$  и  $u_2$  функционально независимы, а  $u_3$  и  $\theta$  выражаются через них:

$$u_3 = \psi(u_1, u_2), \quad \theta = \theta(u_1, u_2) \quad (4)$$

(легко показать, что случай функциональной зависимости между  $u_1$  и  $u_2$  приводит к простым волнам).

Уравнения прямых линий уровня запишем в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A(u_1, u_2)x_3 + B(u_1, u_2), \\ x_2 &= C(u_1, u_2)x_3 + D(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по  $x_1, x_2, x_3$ , найдем выражения для  $\partial u_i / \partial x_k$  через производные функции  $A, B, C, D$  по  $u_1$  и  $u_2$ , пользуясь которыми, а также учитывая (4), перейдем в уравнениях (1), (2) от переменных  $x_1, x_2, x_3$  к переменным  $u_1, u_2, x_3$ . После этого их можно записать в виде

$$V_i x_3 + W_i = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad (6)$$

где  $V_i$  и  $W_i$  зависят только от  $u_1, u_2$ .

Так как уравнения (6) должны выполняться тождественно относительно  $x_3$ , то должны быть выполнены уравнения

$$\begin{aligned} V_1 &= (u_2 - \psi C) A_2 + \kappa \theta \theta_2 C_1 + \psi (\psi_1 + A) C_2 = 0, \\ V_2 &= \psi (\psi_2 + C) A_2 + \kappa \theta \theta_1 A_2 + (u_1 - \psi A) C_1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_3 &= [\kappa \theta (1 - \psi_2 C) + \theta_2 (u_2 - \psi C)] A_1 + [\kappa \theta \psi_1 C - \theta_1 (u_2 - \psi C)] A_2 + \\ &+ [\kappa \theta \psi_2 A - \theta_2 (u_1 - \psi A)] C_1 + [\kappa \theta (1 - \psi_1 A) + \theta_1 (u_1 - \psi A)] C_2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= (u_2 - \psi C) B_2 + \kappa \theta \theta_2 D_1 + \psi (\psi_1 + A) D_2 = 0, \\ W_2 &= \psi (\psi_2 + C) B_1 + \kappa \theta \theta_1 B_2 + (u_1 - \psi A) D_1 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W_3 &= [\kappa \theta (1 - \psi_2 C) + \theta_2 (u_2 - \psi C)] B_1 + [\kappa \theta \psi_1 C - \theta_1 (u_2 - \psi C)] B_2 + \\ &+ [\kappa \theta \psi_2 A - \theta_2 (u_1 - \psi A)] D_1 + [\kappa \theta (1 - \psi_1 A) + \theta_1 (u_1 - \psi A)] D_2 = 0, \end{aligned}$$

где индексы у величин  $A, B, C, D, \psi, \theta$  обозначают дифференцирование по  $u_1$  и  $u_2$ .

Предполагается, что величины  $\psi$  и  $\psi_i$  выражены через  $\theta$  и  $\theta_i$  (или наоборот) с помощью интеграла Бернулли (3). Система уравнений (7), (8) представляет собой переопределенную систему шести уравнений для пяти функций  $A, B, C, D, \psi$  (или  $\theta$ ). В тех случаях, когда решения системы (7), (8) существуют (эти случаи перечислены в теореме п.2.), разрешая формулы (6) относительно  $u_1$  и  $u_2$ , находим  $u_1$  и  $u_2$  как функции координат  $x_1, x_2, x_3$  и затем, используя выражение для  $\psi(u_1, u_2)$  и интеграл Бернулли, находим зависимость  $u_3$  и  $\theta$  от  $x_1, x_2, x_3$ .

2. Теорема. В класс пространственных установившихся течений газа с прямыми линиями уровня при наличии интеграла Бернулли входят:

- 1) простые волны;
- 2) потенциальные двойные волны, описанные в (2);
- 3) конические течения, для которых функции  $A, C, \psi, \theta$  определяются из уравнений (3), (7);  $B = aA + b_1$ ;  $D = aC + b$ ;  $a, b_1, b_2$  — константы;
- 4) в случае  $\gamma = 2$  сверхзвуковые вихревые течения, определяемые уравнениями

$$\theta^2 = -(k_1 u_1 + k_2 u_2) + 2\lambda^2; \quad \psi^2 = \frac{1}{2} (k_1 u_1 + k_2 u_2) - u_1^2 - u_2^2; \quad (9)$$

$$A = \frac{-\psi (4u_1 - k_1) \pm (2u_2 - k_2) \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}}{\theta^2 - 4\psi^2}, \quad (10)$$

$$C = \frac{-\psi (4u_2 - k_2) \mp (2u_1 - k_1) \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}}{\theta^2 - 4\psi^2};$$

$$\begin{aligned} &2(2u_1 - k_1) (k_2 u_1 - k_1 u_2 \pm 2\psi \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}) B_2 - k_2 (\theta^2 - 4\psi^2) D_1 - \\ &- [\theta^2 (4u_1 - k_1) \mp 4(2u_2 - k_2) \psi \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}] D_2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &[\theta^2 (4u_2 - k_2) \pm 4(2u_1 - k_1) \psi \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}] B_1 + k_1 (\theta^2 - 4\psi^2) B_2 + \\ &+ 2(2u_2 - k_2) (k_2 u_1 - k_1 u_2 \pm 2\psi \sqrt{\lambda^2 - \theta^2}) D_1 = 0, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2$  — константы, связанные соотношением  $k_1^2 + k_2^2 = 4\lambda^2$ .

Доказательство теоремы проводится при помощи последовательного рассмотрения условий совместности линейной переопределенной системы (8) для случаев, когда ранг матрицы коэффициентов этой системы равен двум и трем.

3. Полагая  $B=D=0$ , разрешая формулы (10) относительно  $u_1, u_2$  и используя формулы (9), получим сверхзвуковое вихревое коническое течение в явном виде. Не ограничивая общности, можно положить  $k_1=2\lambda, k_2=0$ . При этом течение имеет особенно простой вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{x_1^2}{r^2} \right), & u_2 &= \frac{\lambda}{2} \left( \frac{x_1 x_2}{r^2} \pm \frac{x_3}{r} \right), \\ u_3 &= \frac{\lambda}{2} \left( \frac{x_1 x_3}{r^2} \mp \frac{x_2}{r} \right), & \theta^2 &= \frac{\lambda^2}{r^2} (x_2^2 + x_3^2), & r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для вихря этого течения имеем  $\text{rot } \mathbf{u} = \mp \frac{1}{r} \mathbf{u}$ .

Линии тока определяются формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\alpha} \text{sh } 2(\varphi_0 \mp \varphi), & x_2 &= \frac{2}{\alpha} \text{ch}(\varphi_0 \mp \varphi) \cos \varphi, \\ x_3 &= \frac{2}{\alpha} \text{ch}(\varphi_0 \mp \varphi) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha$  и  $\varphi_0$  — константы,  $\varphi$  — полярный угол в плоскости  $x_2, x_3$ . Значения параметров потока вдоль линий тока определяются формулами

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda}{2} [1 + \text{th}^2(\varphi_0 \mp \varphi)], & u_2 &= \frac{\lambda}{2 \text{ch}(\varphi_0 \mp \varphi)} [\text{th}(\varphi_0 \mp \varphi) \cos \varphi \pm \sin \varphi], \\ u_3 &= \frac{\lambda}{2 \text{ch}(\varphi_0 \mp \varphi)} [\text{th}(\varphi_0 \mp \varphi) \sin \varphi \mp \cos \varphi], & \theta^2 &= \frac{\lambda^2}{\text{ch}^2(\varphi_0 \mp \varphi)}. \end{aligned}$$

Линии тока (13) представляют собой «левые» и «правые» — в зависимости от выбора знака — спирали, образующие трубки тока, поверхности которых имеют уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{\alpha^2}{4} (x_2^2 + x_3^2)^2.$$

При приближении к оси  $x_1$  число витков спиралей, приходящееся на единицу длины оси  $x_1$ , неограниченно возрастает, а скорость звука, плотность и давление стремятся к нулю.

Таким образом, решение (12) представляет собой бесконечно длинный сверхзвуковой «смерч», ось которого направлена по оси  $x_1$ .

Следует заметить, что в работе (3) приведена неполная классификация течений, рассматриваемых в настоящей заметке. В ней нет класса течений для случая  $\gamma=2$ .

Институт математики и механики  
Уральского научного центра Академии наук СССР  
Свердловск

Поступило  
3 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Ф. Сидоров, Н. Н. Яненко, ДАН, т. 123, № 5, 832 (1958). <sup>2</sup> А. А. Никольский, Сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957, стр. 39. <sup>3</sup> Е. В. Ермолин, Сб.: Применение методов вычислительной математики и ЭВМ в технико-экономических расчетах, в. 2, 170, Изд-во Казанск. ун-та, 1970.