

УДК 517.925

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

М. С. Белокурский

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: drakonst@ya.ru

Поступила 12.11.2013

Получены необходимые и достаточные условия, при которых линейная почти периодическая дифференциальная система имеет частично нерегулярные почти периодические решения в критическом резонансном случае.

Пусть D — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, а $AP(D, \mathbb{R}^n)$ — пространство функций $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что каждая $f(t, x) \in AP(D, \mathbb{R}^n)$ является непрерывной на D и почти периодической по t равномерно относительно $x \in D$. Следуя [1] через $\text{Mod}(f)$ обозначим частотный модуль функции f , т.е. наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую множество показателей Фурье (частот) функции f . В работе [2] показано, что системы обыкновенных почти периодических дифференциальных уравнений могут иметь сильно нерегулярные почти периодические решения, т.е. такие решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. А.К. Деменчук изучал частично нерегулярные почти периодические решения, частотный модуль которых содержит только некоторые частоты системы [3–5] и др.

В данной статье исследуется вопрос существования частично нерегулярных почти периодических решений линейной почти периодической системы в критическом резонансном случае, когда среди собственных чисел имеются чисто мнимые с простыми элементарными делителями. Существенным отличием от [4, с. 149] является тот факт, что собственные числа с нулевой действительной частью могут быть кратными.

Рассмотрим линейную систему, предполагая почти периодичность матрицы коэффициентов $A(t)$ и вынуждающей силы $\varphi(t)$ с тривиальным пересечением их частотных модулей, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad \text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(\varphi) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Для системы (1) почти периодические решения с модулем вынуждающей силы называются нерегулярными вынужденными [4, с. 137]. Выясним вопрос о существовании нерегулярных по отношению к $\text{Mod}(A)$ почти периодических решений системы (1).

Вначале, следуя [3], выполним редукцию системы (1) к системе меньшей размерности. Пусть $x(t)$ — почти периодическое решение системы (1), нерегулярное по отношению к частотному модулю матрицы коэффициентов, т.е. обладающее таким свойством, что

$$(\text{Mod}(x) + \text{Mod}(\varphi)) \cap \text{Mod}(A) = \{0\}.$$

Тогда согласно [4, с. 37] вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x + \varphi(t), \quad [A(t) - \hat{A}]x = A_*(t)x = 0, \quad \hat{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \quad (2)$$

Поскольку частотный модуль матрицы $A_*(t)$ содержится в $\text{Mod}(A)$ и $\text{Mod}(x) \cap \text{Mod}(A) = \{0\}$, то из второй системы в силу [4] вытекает, что выполняется условие

$$\text{rank}_{\text{col}} A_* = d < n. \quad (3)$$

В таком случае найдется постоянная неособенная $n \times n$ -матрица Q_{A_*} такая, что у матрицы $A_*(t)Q_{A_*}$ первые $n - d = s$ столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы и замена переменных $x = Q_{A_*}y$ приводит систему (2) к системе

$$\frac{dy}{dt} = By + \psi(t), \quad B_*(t)y = 0,$$

где $B = Q_{A_*}^{-1} \hat{A} Q_{A_*}$; $\psi(t) = Q_{A_*}^{-1} \varphi(t)$; $B_*(t) = A_*(t)Q_{A_*}$.

Согласно исходному предположению полученная система также имеет почти периодическое решение

$$y(t) = Q_{A_*}^{-1} x(t), \quad \text{Mod}(y) = \text{Mod}(x).$$

Столбцы матрицы $B_*(t)$ с номерами $n - d + 1, \dots, n$ линейно независимы. Поэтому соответствующие компоненты почти периодического решения с заданным свойством частот должны быть нулевыми. Это означает, что последняя система примет вид

$$\frac{dy^{[s]}}{dt} = B^{[s,s]}y^{[s]} + \psi^{[s]}(t), \quad B_{[n-s,s]}y^{[s]} + \psi_{[n-s]}(t) = 0, \quad y_{[n-s]} = 0, \quad (4)$$

где $y = \text{col}(y^{[s]}, y_{[n-s]})$, $y^{[s]} = \text{col}(y_1, \dots, y_s)$, $y_{[n-s]} = \text{col}(y_{s+1}, \dots, y_n)$, $B^{[s,s]}$, $B_{[n-s,s]}$ — соответственно верхний и нижний блоки $n \times s$ -матрицы, полученной из матрицы B вычеркиванием последних d столбцов (нижние индексы указывают размерности блоков); $\psi(t) = \text{col}(\psi^{[s]}(t), \psi_{[n-s]}(t))$.

Первая система из (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t) = (Q_{A_*}^{-1})^{[s,n]}x(t)$, где $(Q_{A_*}^{-1})^{[s,n]}$ — первые s строк матрицы $Q_{A_*}^{-1}$. Так как $y(t) = Q_{A_*}^{-1}x(t)$, $y(t) = \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$, то $\text{Mod}(y^{[s]}) = \text{Mod}(x)$. Как следует из (4), вектор $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$B_{[n-s,s]}y^{[s]}(t) + \psi^{[s]}(t) \equiv 0. \quad (5)$$

Таким образом, если система (1) имеет почти периодическое решение $x(t)$, нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$, то выполняются условия (3), (5), где $y^{[s]}(t)$ — почти периодическое решение первой системы из (4) с аналогичным свойством.

Справедливо и обратное утверждение. Покажем, что системы (1) и (4) эквивалентны в смысле существования частично нерегулярных по отношению к $\text{Mod}(A)$ почти периодических решений. Поскольку $y^{[s]}(t)$ — решение первой системы из (4), удовлетворяющее тождеству (5), то $y^{[s]}(t)$ является решением всей системы (4). В силу условия (3) существует невырожденное преобразование $x = Q_{A_*}y$ такое, что вектор $x(t) = Q_{A_*} \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$ является почти периодическим решением системы (1) и $\text{Mod}(x) = \text{Mod}(y^{[s]})$.

Итак, имеет место

Лемма. Для того чтобы система (1) имела почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) столбцовый ранг матрицы $A(t) - \hat{A}(t)$ удовлетворял неравенству (3);
- 2) первая система из (4) имела почти периодическое решение $y^{[s]}(t)$ такое, что

$$(\text{Mod}(y^{[s]}) + \text{Mod}(\varphi)) \cap \text{Mod}(A) = \{0\};$$

3) выполнялось тождество (5), при этом $x(t) = Q_{A*} \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$, где Q_{A*} — постоянная неособенная $n \times n$ -матрица такая, что первые $s = n - d$ столбцов матрицы $[A(t) - \hat{A}(t)]Q_{A*}$ нулевые.

Перейдем теперь к выяснению условий существования требуемых частично нерегулярных почти периодических решений системы (1). Пусть $\lambda_k(B^{[s,s]}) = \alpha_k \pm i\beta_k$ ($k = 1, \dots, k'$; $k' \leq [s/2]$; $i^2 = -1$) — собственные числа матрицы коэффициентов $B^{[s,s]}$ редуцированной системы (4). Предположим, что имеем критический резонансный случай, когда среди собственных чисел $\lambda_k(B^{[s,s]})$ имеются чисто мнимые с простыми элементарными делителями

$$\alpha_l = 0, \quad \beta_l \in \text{Mod}(\varphi) \quad (l = 1, \dots, p; \quad 2p \leq s), \quad \alpha_q \neq 0 \quad (q = 2p + 1, \dots, s), \quad (6)$$

причем числа $\beta_1, \dots, \beta_p$ не обязательно различны, т.е. среди них могут быть и равные.

В таком случае сопряженная система

$$\frac{dz}{dt} = -(B^{[s,s]})^T z, \quad z \in \mathbb{R}^s \quad (7)$$

имеет $2p$ линейно независимых квазипериодических решений

$$z^{(1)}, \dots, z^{(2p)}, \quad \text{Mod}(z^{(j)}) \subseteq \text{Mod}(\varphi) \quad (j = 1, \dots, 2p).$$

Справедлива

Теорема. Пусть в системе (1) матрица коэффициентов $A(t)$ и вынуждающая сила $\varphi(t)$ — почти периодические с тривиальным пересечением их частотных модулей и для редуцированной системы (4) имеет место критический резонансный случай (6). Тогда:

1) если система (1) имеет почти периодическое нерегулярное по отношению к $\text{Mod}(A)$ решение $x(t)$, то это решение является нерегулярным вынужденным;

2) система (1) имеет нерегулярное вынужденное почти периодическое решение тогда и только тогда, когда выполняются условие (3), функции

$$\int_0^t \sum_{k=1}^s z_k^{(j)}(\tau) \psi_k^{[s]}(\tau) d\tau \quad (j = 1, \dots, 2p) \quad (8)$$

ограничены, и справедливо тождество $B_{[n-s,s]} y^{[s]}(t) + \psi_{[n-s]}(t) \equiv 0$, где $y^{[s]}(t)$ — почти периодическое решение первой системы (4) в случае (6).

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы и необходимость второго. Пусть $x(t)$ — частично нерегулярное почти периодическое решение системы (1). Тогда согласно лемме для столбцового ранга матрицы $A_*(t)$ выполняется неравенство (3) и первая система в (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t)$ такое, что $\text{Mod}(y^{[s]}) = \text{Mod}(x)$. В таком случае из [6, с. 463] следует, что функции (8) ограничены. Заметим, что $y^{[s]}(t)$ удовлетворяет и второй системе из (4). Поэтому имеет место требуемое тождество. Так как $\alpha_l = 0$, $\beta_l \in \text{Mod}(\varphi)$ ($l = 1, \dots, p$) и $\text{Mod}(\psi^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$, то $\text{Mod}(y^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. Следовательно $\text{Mod}(x) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$, т.е. решение $x(t)$ является нерегулярным вынужденным.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда существует линейное преобразование, приводящее (2) к системе (4), где $y_{s+1} = \dots = y_n = 0$. Отметим, что матрица $B^{[s,s]}$ имеет собственные числа (6) по предположению. Согласно [6] система (7) будет иметь s частных решений вида

$$y_{k1}^{(j)} = z_k^{(j)}, \quad y_{k1}^{(2p+q)} = e^{-\lambda_q t} F_{kq}, \quad y_{k2}^{(2p+q)} = e^{-\lambda_q t} (t F_{kq} + F_{kq}^{(2)}), \quad \dots,$$

$$y_{kr_q}^{(2p+q)} = e^{-\lambda_q t} \left(\frac{t^{r_q-1}}{(r_q-1)!} F_{kq} + \frac{t^{r_q-2}}{(r_q-2)!} F_{kq}^{(2)} + \dots + F_{kq}^{(r_q)} \right)$$

$$(j = 1, \dots, 2p; \quad q = 2p+1, \dots, s; \quad 2p + r_{2p+1} + \dots + r_s = s),$$

где F_{kq} — некоторые постоянные, r_q — число решений, отвечающих в редуцированной системе (4) и системе (7) собственному числу λ_q с ненулевой действительной частью.

Следуя [6] введем замену переменных в первой системе из (4) при помощи подстановок

$$u^{(j)} = \sum_{k=1}^s z_k^{(j)} y_k, \quad v_1^{(q)} = \sum_{k=1}^s F_{kq} y_k, \quad v_\gamma^{(q)} = \sum_{k=1}^s F_{kq}^{(\gamma)} y_k$$

$$(j = 1, \dots, 2p; \quad q = 2p+1, \dots, s; \quad \gamma = 2, \dots, r_q; \quad 2p + r_{2p+1} + \dots + r_s = s).$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{du^{(j)}}{dt} = \sum_{k=1}^s z_k^{(j)} \psi_k^{[s]}, \quad \frac{dv_1^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_1^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq} \psi_k^{[s]}, \quad \frac{dv_\gamma^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_\gamma^{(q)} - v_{\gamma-1}^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq}^{(\gamma)} \psi_k^{[s]}$$

$$(j = 1, \dots, 2p; \quad q = 2p+1, \dots, s; \quad \gamma = 2, \dots, r_q; \quad 2p + r_{2p+1} + \dots + r_s = s).$$

Так как по условию $\operatorname{Re} \lambda_q \neq 0$, то уравнение

$$\frac{dv_1^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_1^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq} \psi_k^{[s]}$$

имеет частное решение

$$v_1^{(q)} = e^{\lambda_q t} \int_a^t e^{-\lambda_q t} \sum_{k=1}^s F_{kq} \psi_k^{[s]} dt,$$

где $a = -\infty$ при $\operatorname{Re} \lambda_q < 0$ и $a = +\infty$ при $\operatorname{Re} \lambda_q > 0$. Так как это решение ограничено при $-\infty < t < +\infty$, то по теореме Бора–Нейгебауэра оно является почти периодическим. Подставляя это решение в уравнение

$$\frac{dv_2^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_2^{(q)} - v_1^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq}^{(2)} \psi_k^{[s]},$$

мы получаем уравнение такого же типа, что и для $v_1^{(q)}$. Следовательно, уравнение для $v_2^{(q)}$ также допускает почти периодическое решение. Продолжая далее аналогичным образом можно убедиться, что все уравнения

$$\frac{dv_1^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_1^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq} \psi_k^{[s]}, \quad \frac{dv_\gamma^{(q)}}{dt} = \lambda_q v_\gamma^{(q)} - v_{\gamma-1}^{(q)} + \sum_{k=1}^s F_{kq}^{(\gamma)} \psi_k^{[s]}$$

допускают почти периодическое решение при любом выборе функций $\psi_k^{[s]}$.

По условию функции (8) ограничены. Следовательно, по теореме Бора–Нейгебауэра уравнение

$$\frac{du^{(j)}}{dt} = \sum_{k=1}^s z_k^{(j)} \psi_k^{[s]}$$

тоже допускает почти периодическое решение.

Таким образом, доказано, что первая система из (4) имеет почти периодическое решение $y^{[s]}(t)$ и $\text{Mod}(y^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\psi^{[s]}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. Согласно приведенному в теореме тождеству, функция $y(t) = \text{col}(y^{[s]}(t), 0, \dots, 0)$ удовлетворяет всей системе (4). Поэтому $x(t) = Q_{A*}y(t)$ является решением системы (1). Поскольку $\text{Mod}(x) = \text{Mod}(y^{[s]})$, то $x(t)$ будет нерегулярным вынужденным. Теорема доказана.

В качестве примера можно рассмотреть дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2 \sin pt + \cos pt)x + (1 - 2 \sin pt - \cos pt)y - z + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} &= x \sin pt + (1 - \sin pt)y - z + \cos t, \\ \frac{dz}{dt} &= (\sin pt + \cos pt)x + (2 - \sin pt - \cos pt)y - z + \cos t - \sin t, \end{aligned} \quad (9)$$

где числа p и 1 несоизмеримы. Применим теорему для нахождения частично нерегулярных вынужденных почти периодических решений системы (9).

Согласно [3] искомое решение $(x(t), y(t), z(t))^T$ системы (9) удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \sin pt + \cos pt & -2 \sin pt - \cos pt & 0 \\ \sin pt & -\sin pt & 0 \\ \sin pt + \cos pt & -\sin pt - \cos pt & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_{A*} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

система (10) приводится к системе

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \sin pt + \cos pt \\ 0 & 0 & \sin pt \\ 0 & 0 & \sin pt + \cos pt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Матрица второй системы из (11) имеет один ненулевой столбец. Поэтому соответствующая компонента w почти периодического решения с заданным свойством частот должна быть нулевой. Следовательно система (11) примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad w = 0.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов редуцированной системы $\lambda_{1,2} = \pm i$, т.е. имеем критический резонансный случай. Сопряженная система

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

имеет два линейно независимых решения $(\cos t, \sin t)^T$, $(\sin t, \cos t)^T$.

Поскольку интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^t (\cos t \cos t + \sin t(-\sin t)) dt &= \int_0^t \cos 2t dt = \frac{1}{2} \sin 2t, \\ \int_0^t (\sin t \cos t + (-\cos t)(-\sin t)) dt &= \int_0^t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ограничены, то условие 2) теоремы выполняется.

Редуцированная система имеет двухпараметрическое семейство периодических решений

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t - b \sin t + \sin t \\ b \cos t + a \sin t \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные постоянные. Следовательно, система (11) имеет решение

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t - b \sin t + \sin t \\ b \cos t + a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим решение системы (10)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_{A*} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t - b \sin t + \sin t \\ a \cos t - b \sin t + \sin t \\ (a+b) \cos t + (a-b) \sin t + \sin t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Поскольку частота решения (12) совпадает с частотой вынуждающей силы, это решение являются нерегулярным вынужденным.

Замечание. Если взять более высокую размерность, то подобным образом можно привести пример системы с нерегулярным квазипериодическим (почти периодическим) решением.

Литература

1. *Fink A.M.* Almost Periodic Differential Equations // Lecture Notes in Math. V. 377. Berlin: Springer, 1974.
2. *Курицей Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.
3. *Demenchuk A.K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. V. 126. № 1. P. 221–228.
4. *Деменчук А.К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012.
5. *Деменчук А.К.* О частично нерегулярных почти периодических решениях линейных дифференциальных систем в некритическом случае // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 3. С. 11–16.
6. *Малкин И.Г.* О резонансе в квазигармонических системах // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 459–463.

M. S. Belokursky
Irregular solutions of linear almost periodic
differential systems in resonant case

Summary

The necessary and sufficient conditions under which linear almost periodic differential system has partially irregular almost periodic solutions in critical resonant case were obtained.