

Ш. С. КЕМХАДЗЕ

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ МАЛЬЦЕВА И КЛАССЫ ГРУПП КУРОША — ЧЕРНИКОВА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 28 X 1975)

В настоящей заметке определены некоторые конкретные операторы, установлено соотношение между ними (лемма 1 и 2) и при их помощи исследуются следующие вопросы:

1) если исходный класс групп Σ локален, т. е. если для класса групп Σ справедлива локальная теорема А. И. Мальцева ⁽¹⁾, то для каких операторов V класс групп $V\Sigma$ будет локален (теорема 1)?

2) если исходный класс групп Σ радикален в классе всех групп, то для каких операторов V класс групп $V\Sigma$ будет радикальным по А. Г. Курошу ⁽²⁾ (теоремы 2–4)?

3) рассматриваются некоторые применения полученных результатов в основном на классах групп Куроша — Черникова ⁽³⁾ (теоремы 5–6).

1. Пусть оператор V сопоставляет всякому классу групп Σ определенный класс групп $V\Sigma$. Если $V\Sigma = \Sigma$, то скажем, что класс групп Σ замкнут относительно оператора V . Оператор E называем единичным, если для любого класса Σ имеет место $E\Sigma = \Sigma$.

Скажем, что U меньше, чем V , и будем писать $U < V$, если для любого Σ имеет место $U\Sigma \subseteq V\Sigma$. Оператор V называем монотонным, если для любых классов групп Σ и $\mathfrak{X}$ из $\Sigma \subset \mathfrak{X}$ следует $V\Sigma \subseteq V\mathfrak{X}$. Монотонный оператор, больший единичного, называется оператором растяжения, а монотонный оператор меньше единичного называется оператором сужения.

Произведение операторов U и V определено естественным образом: $(UV)\Sigma = U(V\Sigma)$. Если для любого класса Σ имеет место $V^2\Sigma = V\Sigma$, то оператор V называется идемпотентным. Оператор растяжения, который является идемпотентным, называется оператором замыкания. В работе Холла ⁽⁴⁾ рассматриваются операторы замыкания. Пусть V — оператор растяжения. Наименьший V — замкнутый класс, содержащий класс Σ , обозначим через $\bar{V}\Sigma$, т. е. $\bar{V}\Sigma = \bigcap_{\alpha} \Sigma_{\alpha}$, $V\Sigma_{\alpha} = \Sigma_{\alpha} \supseteq \Sigma$.

Оператор $\bar{V}$ называем замыканием оператора V . Минимальное порядковое число α , для которого имеет место $V^{\alpha}\Sigma = \bar{V}\Sigma$, называется степенью замыкания оператора V над классом Σ .

Определим некоторые конкретные операторы:

$J_0\Sigma$ — класс всех групп, порожденных двумя своими инвариантными Σ -подгруппами;

$J\Sigma$ — класс всех групп, порожденных всеми своими инвариантными Σ -подгруппами;

$D\Sigma$ — класс всех групп, порожденных всеми своими достижимыми Σ -подгруппами;

$L\Sigma$ — класс всех групп, порожденных всеми своими субинвариантными Σ -подгруппами;

$L\Sigma$ — класс всех групп, обладающих локальной системой подгрупп из класса Σ ;

$s_0\Sigma$ — класс всех групп, каждая подгруппа которых принадлежит Σ ;

$d_0\Sigma$ — класс всех групп, каждая достижимая подгруппа которых принадлежит Σ ;

$n_0\Sigma$ — класс всех групп, каждая субинвариантная подгруппа которых принадлежит Σ ;

$s\Sigma$ — класс всех подгрупп Σ -групп;

$q_0\Sigma$ — класс всех групп, каждый гомоморфный образ которых принадлежит Σ ;

$k_0\Sigma$ — класс всех групп, любой гомоморфный образ всякой подгруппы которых является Σ -группой;

$q\Sigma$ — класс всех гомоморфных образов Σ -групп;

$r\Sigma$ — класс всех групп, являющихся расширениями Σ -групп при помощи Σ -групп.

Легко видеть, что операторы s_0 , d_0 , n_0 , q_0 , s , q , P , N и k_0 являются идемпотентными. Операторы J_0 , J , s , q , D , N и r являются операторами растяжения, а операторы s_0 , q_0 , d_0 , n_0 и k_0 — операторами сужения. Степень замыкания операторов J_0 и r равна ω , т. е. $r^\omega = \bar{r}$, $J_0^\omega = \bar{J}_0$. Известно, что (см. например, (5)) степень оператора J равна $\omega + 1$, т. е. $J^{\omega+1} = \bar{J} = D$.

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. Если операторы U и V удовлетворяют условиям $UV < VU$, $U > E$ и $U\Sigma = \Sigma$, то $U(V\Sigma) = V\Sigma$, а если $V < E$ и $V\Sigma = \Sigma$, то $V(U\Sigma) = U\Sigma$.

Предложение 2. Если U и V — операторы растяжения и $UV < VU$, то $\bar{U}\bar{V} \leq \bar{V}\bar{U}$ и $\bar{U}\bar{V} \leq \bar{V}\bar{U}$.

Предложение 3. Если V — оператор растяжения, а $\Sigma \subset \mathfrak{X}$ и $V\Sigma = \mathfrak{X}$, то $\bar{V}\Sigma = \bar{V}\mathfrak{X}$.

Предложение 4. Если класс Σ замкнут по подгруппам, то $L^2\Sigma = L\Sigma$.

Предложение 5. Для любого класса групп Σ имеет место $k_0\Sigma = s_0q_0\Sigma$, т. е. $k_0 = s_0q_0$.

2. При помощи этих предложений доказываются следующие операторные соотношения.

Лемма 1. Для любого исходного класса групп Σ имеют место (локальные операторные) соотношения:

1) $Ls_0 \leq s_0L$, 2) $Ld_0 \leq d_0L$, 3) $Ln_0 \leq n_0L$, 4) $Lq_0 \leq q_0L$, 5) $sL \leq Ls$, 6) $qL \leq Lq$.

Докажем только соотношение 4). Пусть $G \in L(q_0\Sigma)$; значит, группа G обладает локальной системой подгрупп $[G_\alpha]$, где $G_\alpha \in q_0\Sigma$. Очевидно, любая фактор-группа G/H обладает локальной системой фактор-групп $[HG_\alpha/H] \cong [G_\alpha/H \cap G_\alpha]$, где $G_\alpha/H \cap G_\alpha \in \Sigma$, т. е. $G/H \in L\Sigma$. Значит, $G \in q_0(L\Sigma)$ и соотношение 4) доказано. Сходным рассуждением доказываются другие соотношения.

Следствие. Для любого исходного класса групп Σ имеет место $Lk_0 \leq k_0L$.

Лемма 2. Для любого исходного класса групп Σ имеют место (радикальные операторные) соотношения:

1) $Jq_0 \leq q_0J$, 2) $Dq_0 \leq q_0D$, 3) $Nq_0 \leq q_0N$, 4) $rq_0 \leq q_0r$, 5) $rs_0 \leq s_0r$, 6) $rd_0 \leq d_0r$, 7) $rn_0 \leq n_0r$.

Докажем только соотношения 2) и 4). Пусть $G \in D(q_0\Sigma)$. По определению, $G = \{G_\alpha\}$, где каждая G_α достижима в G и $G_\alpha \in q_0\Sigma$. Очевидно, любая $G/H = [HG_\alpha/H] \cong [G_\alpha/H \cap G_\alpha]$, где каждая HG_α/H достижима в G/H и $G_\alpha/H \cap G_\alpha \in \Sigma$, т. е. $G/H \in D\Sigma$. Значит, $G \in q_0(D\Sigma)$. Соотношение 2) доказано.

Пусть $G \in r(q_0\Sigma)$. Значит, $G/N \in q_0\Sigma$, где $N \triangleleft G$ и $N \in q_0\Sigma$. Так как класс $q_0\Sigma$ замкнут по фактор-группам, то получим, что любая фактор-группа $G/H \in r\Sigma$. Значит, $G \in q_0(r\Sigma)$. Соотношение 4) доказано. Аналогично доказываются другие соотношения.

Мы придерживаемся определения радикального класса групп, данного в работах (6, 7). Класс групп Σ называется радикальным в классе всех

групп, если $J\Sigma=\Sigma$. Класс групп Σ называется радикальным по Курошу ⁽²⁾, если $J\Sigma=q_0\Sigma=r\Sigma=\Sigma$. Класс групп Σ называется квазирадикальным или предрадикальным по Курошу, если $J\Sigma=q_0\Sigma=\Sigma$. Класс групп Σ называем сильно радикальным, если $J\Sigma=r\Sigma=\Sigma$.

Л е м м а 3. Если $J_0(s_0\Sigma)=s_0\Sigma$, то имеет место $(Js_0)\Sigma\subseteq(s_0J)\Sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G\in J(s_0\Sigma)$. По определению, $G=\{G_\alpha\}$, $G_\alpha\triangleleft G$ и $G_\alpha\in s_0\Sigma$. Возьмем любую подгруппу A группы G и ее любой элемент $a\in A$. Так как класс групп $s_0\Sigma$ замкнут по подгруппам, получаем, что $A\in J\Sigma$. Значит, $G\in s_0\Sigma$.

С помощью соотношений 1) — 4) леммы 1 доказывается

Т е о р е м а 1. Если $L\Sigma=\Sigma$, т. е. если для класса групп Σ справедлива локальная теорема Мальцева, то для классов групп $s_0\Sigma$, $d_0\Sigma$, $n_0\Sigma$ и $q_0\Sigma$ также справедлива локальная теорема Мальцева.

Из соотношений 5) и 6) леммы 1 получаем соответственно, что если $s\Sigma=\Sigma$, то $s(L\Sigma)=L\Sigma$, и если $q\Sigma=\Sigma$, то $q(L\Sigma)=L\Sigma$.

При помощи соотношения 1) леммы 2 доказывается

Т е о р е м а 2. Если $J\Sigma=\Sigma$, то $J(q_0\Sigma)=q_0\Sigma$, т. е. если класс групп Σ радикален, то класс групп $q_0\Sigma$ является квазирадикальным.

Из соотношений 2) — 7) леммы 2 получаем соответственно, что если $D\Sigma=\Sigma$, $N\Sigma=\Sigma$ и $r\Sigma=\Sigma$, то $D(q_0\Sigma)=q_0\Sigma$, $N(q_0\Sigma)=q_0\Sigma$ и $r(q_0\Sigma)=q_0\Sigma$, $r(s_0\Sigma)=s_0\Sigma$, $r(d_0\Sigma)=d_0\Sigma$, $r(n_0\Sigma)=n_0\Sigma$.

Т е о р е м а 3. Если класс групп Σ радикален по Курошу, то класс групп $s_0\Sigma$ также радикален по Курошу.

Доказательство этой теоремы получается из леммы 3 и из того, что если $q_0\Sigma=\Sigma$ и $r\Sigma=\Sigma$, то соответственно имеет место $q_0(s_0\Sigma)=s_0\Sigma$ и $r(s_0\Sigma)=s_0\Sigma$.

Т е о р е м а 4. Если $q_0\Sigma=r\Sigma=L\Sigma=\Sigma$, то класс групп Σ будет радикальным по Курошу и локальным.

Для доказательства достаточно заметить, что если $q_0\Sigma=r\Sigma=\Sigma$, то $J_0\Sigma=\Sigma$, и если $J_0\Sigma=L\Sigma=\Sigma$, то $J\Sigma=\Sigma$.

3. Рассмотрим некоторые применения полученных результатов на классах групп Куроша — Черникова. Известно ⁽²⁾, что среди классов групп Куроша — Черникова Z , RN , RK , ZD , RI , $\bar{Z}$, $\bar{RI}$, RN^* , $\bar{RN}^*$ и $\bar{N}$ первые пять классов групп не замкнуты по гомоморфизмам, а остальные пять замкнуты по гомоморфизмам. В работах ⁽⁸⁾, ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾ и ⁽¹¹⁾ доказано соответственно, что классы групп $\bar{Z}$, $\bar{RI}$ и $\bar{RN}$ не замкнуты по подгруппам. Используя примеры, построенные в работах ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾ и ⁽¹²⁾, получаем, что класс группы q_0RN , который строго лежит между классами групп $\bar{RN}$ и RN , не замкнут по подгруппам.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех неабелевых групп, а через $\mathfrak{R}$ — класс всех групп, совпадающих со своими коммутантами. Очевидно, класс групп $\mathfrak{A}$ замкнут относительно J - и r -операторов, т. е. $J\mathfrak{A}=r\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$, но $s_0\mathfrak{A}\neq\mathfrak{A}$ и $q_0\mathfrak{A}\neq\mathfrak{A}$. В частности, класс групп $q_0\mathfrak{A}$ строго лежит в классе групп $\mathfrak{A}$, т. е. $q_0\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}$. Значит, класс групп $\mathfrak{A}$ является сильно радикальным, но не является радикальным классом по Курошу.

Нетрудно проверяется, что $q_0Z=\bar{Z}$, $q_0RI=\bar{RI}$ и $q_0\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$. Легко заметить, что класс групп $s_0\mathfrak{R}$ является единичным. Что касается класса групп $d_0\mathfrak{R}$, то он не является единичным классом групп. Очевидно, классы групп $\mathfrak{R}$ и $d_0\mathfrak{R}$, где $d_0\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}$, содержат все простые группы.

Для конкретных классов групп Куроша — Черникова и для некоторых новых классов групп $s_0\bar{Z}$, $s_0\bar{RI}$ (совпадает с классом групп Шмидта ⁽¹³⁾), $s_0\bar{RN}$, q_0RN , q_0S , k_0RN , k_0S , $q_0\mathfrak{A}$ и $d_0\mathfrak{R}$ получаем утверждения:

Т е о р е м а 5. Для классов групп $\bar{Z}$, $\bar{RI}$, $s_0\bar{Z}$, $s_0\bar{RI}$, $q_0\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$, $d_0\mathfrak{R}$, $s_0\bar{RN}$, k_0RN и k_0S справедлива локальная теорема Мальцева.

Это утверждение непосредственно получается из теоремы 1, так как известно ⁽¹⁾, ⁽³⁾, что для классов групп Z , RI , $\mathfrak{A}$, $\bar{RN}$, RN и S справедлива локальная теорема Мальцева.

Из теорем 2–4 получается

Теорема 6. *Классы групп $s_0\overline{RN}$, q_0RN , $q_0\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$ и $d_0\mathfrak{R}$ являются радикальными классами групп по Курошу в классе всех групп.*

Из теорем 5 и 6 получаем, что существует обобщенно разрешимый класс групп $q_0RN=RN^0$, который радикален по Курошу; для него справедлива локальная теорема Мальцева, но он не замкнут по подгруппам.

Известно, что существует класс групп RN^* , который радикален по Курошу⁽⁶⁾, но для класса групп RN^* не справедлива локальная теорема Мальцева.

Как известно, из более общей теоремы Мальцева (см., например, ⁽¹⁴⁾, теорема 2, стр. 224) получается, что если класс групп Σ квазиуниверсален, то для него справедлива локальная теорема Мальцева. В связи с этим нами были поставлены следующие вопросы:

1) если $L\Sigma=\Sigma$, т. е. если для класса групп Σ справедлива локальная теорема Мальцева, то будет ли класс групп Σ квазиуниверсальным?

2) если класс групп Σ квазиуниверсален, то будут ли классы групп $s_0\Sigma$, $q_0\Sigma$ и $k_0\Sigma$ квазиуниверсальными?

Недавно Г. Т. Самсонадзе (Тбилиси) и А. Ч. Пинус (Новосибирск) прислали рукописи, в которых доказано, что если класс групп Σ квазиуниверсален, то класс групп $s_0\Sigma$ также является квазиуниверсальным. Первый вопрос, а также вторая и третья часть второго вопроса для классов групп $q_0\Sigma$ и $k_0\Sigma$ пока остаются не решенными.

Педагогический институт им. Ш. Руставели
Батуми

Поступило
26 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Мальцев, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, Физ.-мат. фак. 1, 1944, стр. 3.
² А. Г. Курош, Сибирск. матем. журн., т. 3, № 6, 912 (1962). ³ А. Г. Курош, С. Н. Черников, УМН, т. 1, № 3, 18 (1947). ⁴ Ph. Hall, Proc. Camb. Phil. Soc., v. 59, № 3, 531 (1963). ⁵ Ш. С. Кемхадзе, Тр. Батумск. пед. ин-та, т. 15, 3 (1969). ⁶ Ш. С. Кемхадзе, ДАН, т. 155, № 5, 1003 (1964). ⁷ Б. И. Плоткин, Ш. С. Кемхадзе, Сибирск. матем. журн., т. 6, № 5, 1197 (1965). ⁸ М. И. Каргаполов, ДАН, т. 125, 255 (1959). ⁹ Ю. И. Мерзляков, Алгебра и логика (семинар), т. 2, № 5, 1963, стр. 29. ¹⁰ Ph. Hall, J. London Math. Soc., v. 39, 338 (1964). ¹¹ Г. А. Носков, Сибирск. матем. журн., т. 14, № 3, 680 (1973). ¹² J. S. Wilson, Bull. London Math. Soc., v. 2, 192 (1973). ¹³ О. Ю. Шмидт, Матем. сб., т. 17, 145 (1945). ¹⁴ М. И. Каргаполов, Ю. М. Мерзляков, Основы теории групп, М., 1972.