

УДК 523.015.7

МАТЕМАТИКА

А. А. СУСЛИН

ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ СВОБОДНЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 III 1976)

Пусть k — поле, всякий ли проективный $k[X_1, \dots, X_n]$ -модуль свободен? Этот вопрос был поставлен Ж. П. Серром ⁽¹⁾. Ниже будет показано, что ответ положителен.

Все рассматриваемые кольца предполагаются коммутативными, все модули — унитарными. Для A -модуля M через $M[X_1, \dots, X_n]$ обозначается, как обычно, $A[X_1, \dots, X_n]$ -модуль $M \otimes_A A[X_1, \dots, X_n]$. Элементы этого

модуля представляются в виде многочленов от $X_1, \dots, X_n$ с коэффициентами из M . Будем отождествлять элементы из M с соответствующими многочленами нулевой степени. Если $\alpha \in \text{Hom}_A(M, N)$, то α канонически продолжается до $A[X_1, \dots, X_n]$ -гомоморфизма $M[X_1, \dots, X_n] \rightarrow N[X_1, \dots, X_n]$, который мы будем обозначать той же буквой α .

Через $P(A)$ обозначим класс всех конечно-порожденных проективных A -модулей. Если $P_1, P_2 \in P(A)$, то положим $\text{Um}_A(P_1, P_2) (\subset \text{Hom}_A(P_1, P_2))$ — множество расщепляющих мономорфизмов. Будем писать $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ($\sigma_i \in \text{Um}_A(P_1, P_2)$) в том случае, когда $\sigma_2 = \tau \sigma_1$ при некотором $\tau \in \text{Aut } P_2$ (что равносильно сокер $\sigma_1 \cong \text{сокер } \sigma_2$).

1. Допустимые гомоморфизмы. Пусть B — кольцо, $P, F \in P(B)$. Гомоморфизм $\sigma \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right): P \rightarrow P \oplus F$ будем называть допустимым, если $\sum_{i=0}^m \gamma_i \beta \alpha^i = 1_P$ при некотором m и $\gamma_i \in \text{Hom}(F, P)$.

Лемма 1. Если $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ — допустимый гомоморфизм, то а) $\sigma \in \text{Um}(P, P \oplus F)$, б) для любых $c \in B$, $v \in \text{Hom}(F, P)$ гомоморфизм $\left(\begin{smallmatrix} \alpha + v\beta + c \cdot 1_P \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ является допустимым.

Для допустимого $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ положим $\mathfrak{A}(\sigma) = \left\{ b \in B: \text{при любом } c \in B \right.$
 $\left. \left(\begin{smallmatrix} \alpha + c \cdot 1_P \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \sim \left(\begin{smallmatrix} \alpha + (c+b) \cdot 1_P \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \right\}$.

Лемма 2. а) $\mathfrak{A}(\sigma)$ является аддитивной подгруппой B , б) $\mathfrak{A} \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right) = \mathfrak{A} \left(\begin{smallmatrix} \alpha + v\beta \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ при любом $v \in \text{Hom}(F, P)$.

Если m — натуральное число, $\xi \in \text{Hom}(B^m, B^m)$, то через $\bar{\xi}$ будем обозначать эндоморфизм, взаимный к ξ (таким образом, $\bar{\xi} \cdot \xi = \xi \cdot \bar{\xi} = \det(\xi) \cdot 1_{B^m}$).

Лемма 3. Предположим, что P — модуль постоянного ранга m , $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right)$ — допустимый гомоморфизм, $\varphi \in \text{Hom}(F, B)$, $\psi \in \text{Hom}(B^m, P)$. Если положить

$$\theta = \begin{pmatrix} \varphi & \beta \\ \varphi & \beta & \alpha \\ \vdots & & \\ \varphi & \beta & \alpha^{m-1} \end{pmatrix} \in \text{Hom}(P, B^m), \quad b = \det(\theta \cdot \psi),$$

то $\mathfrak{A}(\sigma) \supset b \cdot B$.

Доказательство. Положим

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Hom}(B^m, B^m), \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Hom}(B, B^m),$$

$$\eta = \psi \cdot (\theta \psi).$$

Тогда $\theta \cdot \eta = b \cdot 1_{B^m}$, $\eta \cdot \theta = b \cdot 1_P$, $[\eta \varepsilon \theta]^m = b^{m-1} \eta \varepsilon^m \theta = 0$ и, следовательно,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1_P + \eta \varepsilon \theta & \eta \pi \varphi \\ 0 & 1_F \end{pmatrix} \in \text{Aut}(P \oplus F).$$

Легко видеть, что $\tau \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + b \cdot 1_P \\ \beta \end{pmatrix}$. Аналогично

$$\begin{pmatrix} \alpha + c \cdot 1_P \\ \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha + (c + b) \cdot 1_P \\ \beta \end{pmatrix}$$

При любом $c \in B$, т. е. $b \in \mathfrak{A}(\sigma)$. Заменяя ψ на $\psi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, получим

$b \cdot d \in \mathfrak{A}(\sigma)$.

Лемма 4. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ — допустимый гомоморфизм и $\varphi \in \text{Hom}(F, B)$ таков, что $\varphi \beta \neq 0$. Предположим, что B — поле и $\dim P = m$. Тогда существует $v \in \text{Hom}(F, P)$ такой, что элементы $\varphi \beta$, $\varphi \beta(\alpha + v \beta)$, $\dots$, $\varphi \beta(\alpha + v \beta)^{m-1} \in \text{Hom}(P, B)$ линейно независимы.

Индукцией по $k (= 0, 1, \dots, m-1)$ докажем существование v_k такого, что $\varphi \beta$, $\varphi \beta(\alpha + v_k \beta)$, $\dots$, $\varphi \beta(\alpha + v_k \beta)^k$ линейно независимы. Предположим, что $k < m-1$ и v_k уже построено. Если $\varphi \beta(\alpha + v_k \beta)^{k+1} \notin B \cdot \varphi \beta + \dots + B \cdot \varphi \beta(\alpha + v_k \beta)^k$, то можно взять $v_{k+1} = v_k$. В противном случае положим

$$P_1 = \bigcap_{i=0}^k \ker(\varphi \beta(\alpha + v_k \beta)^i), \quad P_2 = \bigcap_{i=0}^{k-1} \ker(\varphi \beta(\alpha + v_k \beta)^i).$$

Очевидно, $\dim P_1 = m - k - 1 > 0$, $\dim P_2 = m - k$, кроме того, $(\alpha + v_k \beta)P_1 \subset P_1$.

Из допустимости $\begin{pmatrix} \alpha + v_k \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ вытекает существование $p \in P_1$, для которого $\beta(p) \neq 0$. Найдем v' : $F \rightarrow P_2$, чтобы $v'(\beta(p)) \notin P_1$, и положим $v_{k+1} = v_k + v'$.

Из лемм 2 и 3 следует, что, если P — модуль постоянного ранга m и

$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ — допустимый гомоморфизм, то

$$\mathfrak{A}(\sigma) \supset \sum_{v, \varphi, \psi} \det \left[\begin{pmatrix} \varphi \beta \\ \vdots \\ \varphi \beta(\alpha + v \beta)^{m-1} \end{pmatrix} \psi \right] \cdot B,$$

а из леммы 4 — что последний идеал не содержится ни в каком максимальном идеале B , так что $\mathfrak{A}(\sigma) = B$.

Лемма 5. Если $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ — допустимый гомоморфизм, то $\sigma \sim \begin{pmatrix} \alpha + b \cdot 1_P \\ \beta \end{pmatrix}$ при любом $b \in B$.

В том случае, когда P имеет постоянный ранг, утверждение уже было доказано выше. Общий случай легко сводится к этому.

Предложение 1. Пусть $B = A[X]$; $P = P_0[X]$, $Q = Q_0[X] \in \mathbf{P}(B)$; $\sigma_0, \sigma_1 \in \text{Um}_A(P_0, Q_0)$, причем $\sigma_0 + X \sigma_1 \in \text{Um}_B(P, Q)$. Тогда $\sigma_0 \sim \sigma_0 X \sigma_1 \sim \sigma_1$.

Отождествив P_0 с прямым слагаемым Q_0 при помощи σ_1 , мы можем считать, что $Q_0 = P_0 \oplus F_0$ и $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Запишем σ_0 в виде $\sigma_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}: P_0 \rightarrow P_0 \oplus F_0$.

Из унимодулярности $\sigma_0 + X\sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha & X \\ & \beta \end{pmatrix}$ легко следует, что $\sigma_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ — допустимый гомоморфизм. Теперь лемма 5 показывает, что $\sigma_0 \sim \sigma_0 + X\sigma_1 \sim \sim \sigma_0 + \sigma_1$. Применяя те же рассуждения к $\sigma_1 + X\sigma_0 \in \text{Um}_B(P, Q)$, получим $\sigma_1 \sim \sigma_1 + X\sigma_0 \sim \sim \sigma_1 + \sigma_0$.

II. Почти изоморфные модули. Будем называть конечно-порожденные проективные $A[X]$ -модули M и F почти изоморфными в том случае, когда существует мономорфизм $\lambda: M \rightarrow F$ такой, что $\text{coker } \lambda$ — конечно-порожденный A -модуль (подобный мономорфизм будем называть почти изоморфизмом). Легко видеть, что мономорфизм λ является почти изоморфизмом в том и только в том случае, когда $\lambda(M) \supset f \cdot F$ при некотором унитарном многочлене f , а для почти изоморфности M и F необходимо и достаточно, чтобы $S^{-1}M \cong S^{-1}F$, где S — мультипликативная система унитарных многочленов. Хорошо известно, что почти изоморфные модули стабильно изоморфны (см. ⁽⁵⁾).

Теорема 1. Пусть M и $F = F_0[X]$ (где $F_0 \in \mathbf{P}(A)$) — почти изоморфные модули, тогда $M \cong F$.

Отождествив M при помощи некоторого почти изоморфизма с подмодулем F , будем считать, что $F \supset M \supset f \cdot F$, где $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in S$. Положим $F_1 = F_0 \oplus X \cdot F_0 \oplus \dots \oplus X^{n-1} F_0$, $P_0 = M \cap F_1$. Тогда $F = F_1 \oplus f \cdot F$, $M = P_0 \oplus f \cdot F$ и, следовательно, $P_0 \in \mathbf{P}(A)$. Если $p \in P_0 \subset F_1$, то $X \cdot p \in (P_0 \oplus f \cdot F) \cap (F_1 \oplus f \cdot F_0) = P_0 \oplus f \cdot F_0$. Таким образом, $X \cdot p = \alpha(p) \oplus f \cdot \beta(p)$, где $\alpha \in \text{Hom}_A(P_0, P_0)$, $\beta \in \text{Hom}_A(P_0, F_0)$. Через $j: P_0[X] \rightarrow M$ обозначим $A[X]$ -гомоморфизм, получающийся продолжением канонического вложения $P_0 \subset M$. Легко видеть, что последовательность

$$0 \rightarrow P_0[X] \xrightarrow{\begin{pmatrix} X-\alpha \\ \beta \end{pmatrix}} P_0[X] \oplus F_0[X] \xrightarrow{(j, -f)} M \rightarrow 0$$

точна. Поскольку $M \in \mathbf{P}(B)$, то $\begin{pmatrix} X-\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \text{Um}(P_0[X], P_0[X] \oplus F_0[X])$, и в силу предложения 1 $\begin{pmatrix} X-\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. $M = \text{coker} \begin{pmatrix} X-\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cong F = \text{coker} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следствие. Пусть $B = C[Y_1, \dots, Y_n]$, $f \in B$, — многочлен, унитарный по Y_1 ; $M, F \in \mathbf{P}(B)$ и $M_f \cong F_f$. Предположим, что F — расширенный модуль (т. е. $F \cong F_0[X_1, \dots, X_n]$ при некотором $F_0 \in \mathbf{P}(C)$), тогда $M \cong F$.

III. Основные результаты.

Лемма 6 (см. ⁽²⁾, лемма 4.2). Если A — нётерово кольцо, $\mathfrak{A}$ — идеал в $A[X]$ и $\mathfrak{A} \subset A$ — идеал старших коэффициентов многочленов из $\mathfrak{A}$, то $ht_A \mathfrak{A} \geq ht_{A[X]} \mathfrak{A}$.

Для кольца $B = C[X_1, \dots, X_n]$ через S_n обозначим мультипликативную систему, состоящую из всех многочленов f , удовлетворяющих при всех достаточно больших t условию U_m : после замены переменных $X_1 = Y_1$, $X_2 = Y_2 + Y_1^m, \dots, X_n = Y_n + Y_1^{(m^{n-1})}$ многочлен f становится унитарным по Y_1 .

Используя лемму 6 и индукцию по n , получаем:

Лемма 7. Если C — нётерово кольцо, то $\dim S_n^{-1}B \leq \dim C$.

Будем говорить, что $F \in \mathbf{P}(B)$ удовлетворяет условию сокращения, если из того, что F стабильно изоморфен F_1 , следует $F \cong F_1$.

Теорема 2. Пусть C — нётерово кольцо, $B = C[X_1, \dots, X_n]$, $F \in \mathbf{P}(B)$, $\text{rank } F > \dim C$. Тогда а) если F — расширенный модуль, то F удовлетворяет условию сокращения, б) если C — регулярное кольцо, то F — расширенный модуль.

Если F стабильно изоморфен M , то и $S_n^{-1}F$ стабильно изоморфен $S_n^{-1}M$. Поскольку $\text{rank } S_n^{-1}F > \dim C \geq \dim S_n^{-1}B$, то согласно теореме Басса о сокращении (см. ⁽¹⁾, гл. IV) $S_n^{-1}M \cong S_n^{-1}F$ и, следовательно, $M_f \cong F_f$ при не-

котором $f \in S_n$. Теперь следствие к теореме 1 показывает, что $M \cong F$. Утверждение б) следует из а) и теоремы Гротендика (см. ⁽¹⁾, гл. XII).

Теорема 3*. Если C — дедекиндово кольцо, то всякий конечно-порожденный проективный $C[X_1, \dots, X_n]$ -модуль F является расширенным. Если C — область главных идеалов, то F является свободным модулем.

IV. Симплектические модули. Если C — кольцо, B — C -алгебра и $\mathfrak{P} \in \text{Pic } C$, то $\mathfrak{P}$ -симплектическим B -модулем мы будем называть модуль $P \in \mathfrak{P}(B)$, снабженный невырожденной билинейной кососимметричной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle: P \times P \rightarrow \mathfrak{P} \otimes_C B$. Если $Q \in \mathfrak{P}(B)$, то положим $P =$

$$= Q \oplus \text{Hom}_B(Q, \mathfrak{P} \otimes_C B) \text{ и } \langle q_1 \oplus \varphi_1, q_2 \oplus \varphi_2 \rangle = \varphi_1(q_2) - \varphi_2(q_1). \text{ Полученный } \mathfrak{P}\text{-сим-}$$

плектический B -модуль будем обозначать $H_{\mathfrak{P}}(Q)$. Положим $H_{\mathfrak{P}} = H_{\mathfrak{P}}(B)$,

$$H_{\mathfrak{P}, n} = H_{\mathfrak{P}}(B^n) = H_{\mathfrak{P}} \perp H_{\mathfrak{P}} \perp \dots \perp H_{\mathfrak{P}} \text{ } (\perp \text{ — ортогональная прямая сумма}).$$

Из теоремы 3 легко следует

Теорема 4. Пусть C — дедекиндово кольцо, $\mathfrak{P} \in \text{Pic } C$. Тогда всякий $\mathfrak{P}$ -симплектический $C[X_1, \dots, X_n]$ -модуль изоморфен $H_{\mathfrak{P}, m}$ при некотором m .

Предложение 2. Если $\mathfrak{P} \in \text{Pic } C$ и B — нётерова C -алгебра такая, что $\dim B \leq 2$, то стабильно изоморфные $\mathfrak{P}$ -симплектические B -модули изоморфны.

Теорема 5. Если C — регулярное коммутативное кольцо, такое, что $\dim C = 2$ и $2C = C$, то всякий конечно-порожденный проективный $C[X_1, \dots, X_n]$ -модуль является расширенным.

В силу теоремы 2 достаточно рассмотреть модули ранга 2. Если P — такой модуль, то $\Lambda^2 P \in \text{Pic}(C[X_1, \dots, X_n])$, и, следовательно, $\Lambda^2 P \cong \mathfrak{P}[X_1, \dots, X_n]$ при некотором $\mathfrak{P} \in \text{Pic } C$. Наделим P структурой $\mathfrak{P}$ -симплектического модуля, положив $\langle p_1, p_2 \rangle = p_1 \wedge p_2$. В силу теоремы Каруби ⁽³⁾ $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ стабильно изоморфен $(P_0[X_1, \dots, X_n]; \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $(P_0; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — некоторый $\mathfrak{P}$ -симплектический C -модуль. Поскольку $(S_n^{-1}P, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и $(S_n^{-1}P_0[X_1, \dots, X_n]; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ стабильно изоморфны и $\dim S_n^{-1}C[X_1, \dots, X_n] \leq 2$, то (см. предложение 2) $(S_n^{-1}P; \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong (S_n^{-1}P_0[X_1, \dots, X_n]; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и, в частности, $S_n^{-1}P \cong S_n^{-1}P_0[X_1, \dots, X_n]$. Теперь так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем $P \cong P_0[X_1, \dots, X_n]$.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что теоремы 2 и 3 справедливы также для кольца $C[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$.

Г и п о т е з а: если C — регулярное кольцо такое, что $m \cdot C = C$ при всех $1 \leq m < \dim C + 1$, то всякий конечно-порожденный проективный $C[X_1, \dots, X_n]$ -модуль является расширенным.

Примечание при корректуре. Используя одну теорему Мурти (см. ⁽⁶⁾), можно показать, что условие $C = 2 \cdot C$ является излишним для справедливости теоремы 5.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
26 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Х. Басс, Алгебраическая К-теория, М., «Мир», 1973. ² H. Bass, Liberation des modules projectifs sur certain anneaux de polynomes, Sem. N. Bourbaki ex. 448 (1973/1974). ³ M. Karoubi, Periodicite de la K-theorie hermitienne, Proc. Battele Conf. on algebraic K-theory, v. III, Springer, Lecture Notes 343. ⁴ J. P. Serre, Ann. Math., v. 61, 197 (1955). ⁵ R. G. Swan, Inv. Math., v. 27, 1/2, 23 (1974). ⁶ M. P. Murthy, J. Lond. Math. Soc., v. 41, 163, 453 (1966).

* Как стало известно автору в последнее время, теоремы 1 и 3 были независимо получены Куилленом.