

УДК 621.395.65

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

М. И. КРАТКО

О ЧИСЛЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ РАЗБЛОКИРОВКИ ТРЕХКАСКАДНОГО КОММУТАТОРА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 14 X 1975)

1. В кибернетической технике, в частности в системах передачи и распределения информации, в вычислительной технике и др., широко используются устройства коммутирования каналов связи (коммутаторы). Абстрактным коммутатором $K(n, m)$ называется устройство с n входами и m выходами, имеющее для каждого взаимно однозначного отображения

$$\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_k), \\ j_1, j_2, \dots, j_k),$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, по крайней мере одно состояние g_k , в котором реализуется отображение φ , т. е. в котором i_1 -й вход соединен с j_1 -м выходом, i_2 -й вход — с j_2 -м выходом и т. д., i_k -й вход соединен с j_k -м выходом.

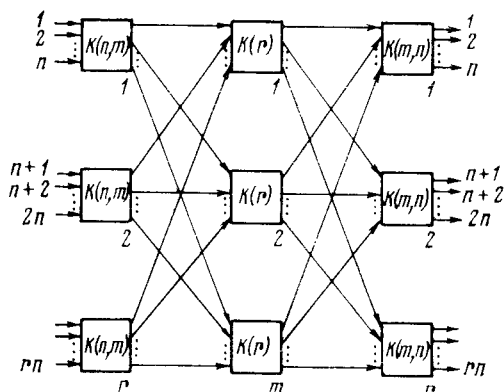


Рис. 1

Трехкаскадным коммутатором называется схема $S(n, m, r)$, построенная следующим образом (рис. 1). Все ее элементы располагаются в трех рядах (каскадах) и между собой соединяются только элементы соседних рядов. В первом ряду — r коммутаторов $K(n, m)$, во втором — m коммутаторов $K(r, r)$ и в третьем — r коммутаторов $K(m, n)$. Различные выходы элементов первого и второго каскадов присоединяются к раз-

личным элементам соответственно второго и третьего каскадов, причем не допускаются соединения одного выхода с двумя или более входами и одного входа с двумя или более выходами. Входами схемы $S(n, m, r)$ являются все nr входов элементов первого каскада, выходами — все nr выходов элементов третьего каскада. Хорошо известно ⁽¹⁾, что при $m \geq n$ схема $S(n, m, r)$ является коммутатором $K(nr, nr)$. Состояние схемы $S(n, m, r)$ — это набор состояний всех ее элементов.

Пусть $\langle \varphi, \varphi_1 \rangle$ — пара взаимно однозначных отображений таких, что

$$\varphi: X \rightarrow Y, \quad X \subseteq \{1, 2, \dots, nr\}, \quad Y \subseteq \{1, 2, \dots, nr\}, \quad |X| = |Y| < nr;$$

$$\varphi_1: X_1 \rightarrow Y_1, \quad X_1 = X \cup \{a\}, \quad Y_1 = Y \cup \{b\}, \quad a \in \{1, 2, \dots, nr\} \setminus X,$$

$$b \in \{1, 2, \dots, nr\} \setminus Y,$$

и C — множество всех таких пар отображений.

Введем обозначения:

Π_φ — множество всех состояний, в которых схема реализует отображение φ ; Π_{φ_1} — множество всех состояний, в которых схема реализует отображение φ_1 ; $p(g_\varphi, \varphi_1)$ — минимальное число элементов, состояния которых надо изменить, чтобы схема $S(n, m, r)$ перешла из состояния g_φ в некоторое состояние из Π_{φ_1} .

$$p(\varphi, \varphi_1) = \max_{\alpha \in \Pi_\varphi} p(\alpha, \varphi_1): \quad P(n, m, r) = \max_{(\varphi, \varphi_1) \in C} p(\varphi, \varphi_1).$$

Функция $P(n, m, r)$ называется функцией Пола; ее исследованию посвящен ряд работ (1-4). Известно, что $P(n, n, r) = r-1$, $P(n, 2n-1, r) = 0$, получены также точные значения $P(n, m, r)$ для некоторых частных случаев, например, для $P(n, 2n-2, r)$.

2. В настоящей работе мы покажем, как найти значения функции $P(n, m, r)$ для произвольных r и m , $n < m < 2n-1$. Для этого свяжем с отображением $\varphi = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$ где $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ — подмно-

жества множества $\{1, 2, \dots, nr\}$, двусторонний граф G_φ следующим образом. Граф G_φ имеет $2r$ вершин, по r вершин с каждой стороны. Каждой паре $\begin{pmatrix} i_s \\ j_s \end{pmatrix}$ отображения φ ставится в соответствие одно ребро графа G_φ : оно соединяет вершину с номером $\lfloor i_s/n \rfloor$ слева с вершиной номера $\lfloor j_s/n \rfloor$ справа, где $\lfloor x \rfloor$ означает наименьшее целое число $\geq x$.

Легко видеть, что каждому состоянию схемы $S(n, m, r)$ из множества состояний Π_φ соответствует некоторая правильная раскраска ребер графа G_φ , использующая не более m цветов. При переходе от отображения φ к φ_1 к графу G_φ добавляется еще одно неокрашенное ребро и полученный граф G_{φ_1} снова надо правильно раскрасить, используя те же m цветов. В этих терминах значение функции $P(n, m, r)$ равно такому минимальному числу μ , что в произвольном однородном двустороннем графе G степени n с r вершинами слева и r вершинами справа для любой его правильной частичной раскраски ребер и любого неокрашенного ребра (a, b) потребуется перекрасить не более чем μ окрашенных ранее ребер, чтобы правильно окрасить ребро (a, b) .

Теорема. Для $n < m < 2n-1$

$$P(n, m, r) \leq \left\lceil \frac{2n-m}{m-n} \left[\left(\frac{\log_2 r}{\log_2 \left\lceil \frac{m-n}{\left\lfloor \frac{2n-m}{2} \right\rfloor} \right\rceil} + 1 \right) \right] \right\rceil,$$

где $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x .

Идея доказательства этой теоремы заключается в следующем. Пусть в двустороннем графе имеется пара смежных вершин (a, b) такая, что в вершине a присутствует цвет α , которого нет в вершине b , и в вершине b имеется цвет β , которого нет в a . Через $\Gamma_a(\alpha, \beta)$ обозначим максимальный путь, начинающийся в вершине a , все ребра которого попеременно окрашены в цвета α и β . Пусть при некоторой правильной частичной раскраске графа G ребро (a, b) оказалось неокрашенным и $d(a, b)$ — минимальное число перекрасок ребер, позволяющее, не увеличивая числа красок m , правильно окрасить ребро (a, b) .

Лемма. Если $\Gamma_a(\alpha, \beta) \leq d(a, b)$, то в каждой паре смежных вершин этого пути присутствуют все m красок.

Действительно, если найдется пара соседних вершин (a_1, b_1) пути $\Gamma_a(\alpha, \beta)$, в которых нет какого-нибудь одного цвета, скажем цвета γ , то ребро $(a_1, b_1) \in \Gamma_a(\alpha, \beta)$ можно окрасить в цвет γ и тем самым укоротить путь $\Gamma_a(\alpha, \beta)$. Перекраска в цвет α всех дуг пути $\Gamma_a(\alpha, \beta)$, ранее окрашен-

ных в цвет β , и перекраска в цвет β всех дуг, ранее окрашенных в цвет α , очевидно, не нарушает правильности раскраски и устраняет цвет α из вершины a , т. е. позволяет окрасить в цвет α ребро (a, b) .

Используя эту лемму, легко доказать теорему.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
18 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Э. Бенеш, Математические основы теории телефонных сообщений, М., 1968.
² А. А. Архангельская, В. А. Ершов, В. И. Нейман, Автоматическая коммутация каналов связи, М., 1970. ³ А. Д. Харкевич, В. А. Гармаш, Сб.: Системы массового обслуживания и коммутация, М., 1974. ⁴ L. A. Bassalygo, I. I. Grushko, V. I. Neiman, VI Intern. Teletraffic Congr., Munich, 1970.