

Л. В. КОЛЕДОВ

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И АППРОКСИМАЦИОННО-МОМЕНТНЫЕ ШКАЛЫ

(Представлено академиком С. М. Никольским 20 X 1975)

1°. Настоящая работа, направленная, как и более ранние работы ((¹), § 4. (²)), на получение конструктивных характеристик областей определения дробных степеней эллиптических операторов, посвящена изучению операторов в областях с углами. Приведем пример.

Пусть Ω — ограниченная область в E^2 , граница которой $\partial\Omega$ является C^5 -гладким контуром всюду, кроме точки $(0, 0)$, в окрестности которой она образует угол $\omega_0 (\geq 3/2\pi)$. Обозначим через B оператор, действующий в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, с областью определения $\mathcal{D}(B)$, задаваемый следующим образом:

$$Bu(x) = \Delta^2 u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ u \in W_2^4(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\partial\Omega \setminus (0,0)} = 0 \right\},$$

где $\xi(x)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Из результатов Кондратьева ((³), § 5, п. 5.3, 5.7) легко получить следующее

Предложение. Оператор B можно продолжить* до позитивного в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ оператора A с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j : u \in \mathcal{D}(B), \quad \mu_j \in (-\infty, \infty) \right\};$$

здесь $g_j(r, \varphi) = \chi(r) r^{1+\alpha_j} \Phi_j(\varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты на плоскости; $\chi \in C^\infty(0, \infty)$, причем $\chi(r) = 0$, $r > 2\varepsilon$, $\chi(r) = 1$, $r < \varepsilon$, $\chi(r) \geq 0$ ($\varepsilon > 0$ достаточно мало).

$$\Phi_j \in C^4(0, \omega_0);$$

$$\Phi_j(0) = \Phi_j(\omega_0) = \Phi_j'(0) = \Phi_j'(\omega_0) = 0;$$

α_j , $j=1, \dots, m$, — нецелые корни уравнения $\sin^2 \omega_0 \alpha - \alpha^2 \sin^2 \omega_0 = 0$, лежащие на интервале $(0, 2)$.

(Легко проверить, что например, при ω_0 , близком к 2π , $m=6$.)

Пусть $\tau \in [0, 1]$ — вещественное число, A^τ — степень оператора A , H_τ — область определения A^τ . Обозначим через K_τ следующее пространство:

$$K_\tau = W_2^{4\tau}(\Omega), \quad 0 \leq \tau \leq 1/8,$$

$$K_\tau = \{ u \in W_2^{4\tau}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad 1/8 < \tau \leq 3/8,$$

$$K_\tau = \left\{ u + \sum_{\alpha_j < 4\tau - 2} \mu_j g_j : u \in W_2^{4\tau}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\partial\Omega \setminus (0,0)} = 0 \right\}, \quad \tau > 3/8.$$

Через $W_p^l(\Omega)$ ($l \geq 0$, $p \geq 1$ — вещественные числа) мы обозначаем пространство функций u , обладающих конечной нормой:

* Имеется в виду продолжение по Фридрихсу.

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \sum_{|r|=l} \|D^r u\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}, \quad l \text{ целое};$$

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \sup_{\substack{h \in E^2 \\ |h| \in (0,1)}} |h|^{[l]-l} \sum_{|r|=[l]} \|\Delta_h^l D^r u\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}, \quad l \text{ нецелое},$$

где $D^r u$ — обобщенная производная порядка $r = (r_1, \dots, r_n)$ ($r_i \geq 0$ — целые числа); $[l]$ — целая часть l , $\Delta_h^l v(x)$ — разность порядка k (k натуральное), если $[x, x+kh] \subset \Omega$, $\Delta_h^l v(x) = 0$ в противном случае.

Теорема 1. Для любых $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, \tau)$ имеют место непрерывные вложения:

$$K_\tau \rightarrow H_{\tau-\varepsilon}; \quad (1)$$

$$H_\tau \rightarrow K_{\tau-\varepsilon}. \quad (2)$$

Теорема 1 является следствием теоремы 2 (вложение (1)) и теоремы 3 (вложение (2)) настоящей работы, а также интерполяционной теоремы (⁽¹⁾, § 4), принадлежащей И. Б. Симоненко. Сформулируем последнюю.

2°. Пусть $\{B_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ — семейство банаховых пространств такое, что для любых r, s , удовлетворяющих неравенству $0 \leq r < s \leq 1$, имеют место непрерывные вложения $B_s \rightarrow B_r$.

Определение 1. Семейство $\{B_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ образует слабо аппроксимационную шкалу, если существует функция $C: (0, 1) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что для любого $\tau \in (0, 1)$ и $x \in B_\tau$ найдется абстрактная функция $\bar{x}: [1, \infty) \rightarrow B_1$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\|\bar{x}(\lambda) - x\|_{B_0} \leq C(\tau, \varepsilon) \lambda^{-\tau+\varepsilon} \|x\|_{B_\tau},$$

$$\|\bar{x}(\lambda)\|_{B_1} \leq C(\tau, \varepsilon) \lambda^{1-\tau+\varepsilon} \|x\|_{B_\tau}.$$

Определение 2. Семейство $\{B_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ образует моментную шкалу, если существует функция $C: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что для любого $\tau \in (0, 1)$ и $x \in B_1$ имеет место оценка

$$\|x\|_{B_\tau} \leq C(\tau) \|x\|_{B_1}^\tau \|x\|_{B_0}^{1-\tau}.$$

Интерполяционная теорема. Пусть семейство $\{B_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ образует слабо аппроксимационную шкалу, семейство $\{C_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ — моментную, F — оператор из $\text{Hom}(B_0, C_0)$ * такой, что $F|_{B_1} \in \text{Hom}(B_1, C_1)$.

Тогда для любых $\tau \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, \tau)$

$$F|_{B_\tau} \in \text{Hom}(B_\tau, C_{\tau-\delta}).$$

Примером аппроксимационной и моментной шкалы является семейство $\{H_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ (по поводу доказательств см. (⁽⁴⁾, § 14).

Перейдем к формулировке основных результатов.

3°. Пусть Ω — ограниченная область в E^n ; $\partial\Omega$ — ее граница, удовлетворяет условию Липшица (см., например, (⁽⁵⁾)); l, m — натуральные числа; $\Gamma \subset (0, 1)$ — конечное множество и $G: \Gamma \rightarrow 2^{\mathcal{L}_p(\Omega)}$ — такое отображение Γ в множество подмножеств множества $\mathcal{L}_p(\Omega)$, что $G(\gamma)$ конечно для любого $\gamma \in \Gamma$, причем:

$$\text{а) } G(\gamma) \subset W_p^l(\Omega) \setminus \bigcup_{\tau > \gamma} W_p^r(\Omega);$$

б) для любых $g_1, g_2 \in G(\gamma)$, $g_1 \neq g_2$, носители $\text{supp } g_i$, $i=1, 2$, не пересекаются.

Пусть, далее, $\{B_j\}_{j=1}^m$ — некоторое семейство дифференциальных операторов из $\text{Hom}(W_p^l(\Omega) \mathcal{L}_p(\partial\Omega))$, задаваемых соотношениями

* $\text{Hom}(B, C)$ — пространство ограниченных линейных операторов из банахова пространства B в банахово пространство C .

$$B_j u(x) = \sum_{|r| \leq m_j} b_{rj}(x) D^r u(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j=1, \dots, m,$$

где m_j — порядок оператора B_j , $m_j < l$.

Обозначим через $\{K_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ семейство банаховых пространств, задаваемое следующим образом:

$$K_0 = \mathcal{L}_p(\Omega),$$

$$K_\tau = \left\{ u + \sum_{\gamma \in \Gamma \cap (0, \tau)} (M_\gamma, G(\gamma)) : u \in W_p^{l_\tau}(\Omega), M_\gamma \in E^{G(\gamma)}, B_j u(x) = 0, \right.$$

$$\left. x \in \partial\Omega, j \leq \max \{i: m_i < l\tau - p^{-1}\} \right\}.$$

Здесь $E^{G(\gamma)}$ — множество всевозможных отображений $G(\gamma)$ в множество E вещественных чисел, $(M_\gamma, G(\gamma)) = \sum_{g \in G(\gamma)} M_\gamma(g)g$. Норму в K_τ введем соотношением

$$\left\| u + \sum_{\gamma \in \Gamma \cap (0, \tau)} (M_\gamma, G(\gamma)) \right\|_{K_\tau} = \|u\|_{W_p^{l_\tau}(\Omega)} + \max_{\gamma \in \Gamma \cap (0, \tau)} \max_{g \in G(\gamma)} |M_\gamma(g)|.$$

Теорема 2. Пусть Ω — область в E^2 , граница которой $\partial\Omega$ состоит из конечного числа C^{l+1} -гладких кривых, пересекающихся под ненулевыми углами, причем Ω лежит по одну сторону от границы. Пусть граничные операторы $\{B_j\}_{j=1}^m$, $m \leq l$, удовлетворяют следующим условиям:

1) порядок m_j оператора B_j равен $j-1$;

2) $b_{rj} \in C^{l+1}(\partial\Omega)$, $|r| \leq m_j$;

3) $\sum_{|r| \leq m_j} b_{rj}(x) \xi^r(x) \neq 0$, $x \in N$, где $\xi(x)$ — единичная нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, $\xi^r = \xi_1^r \dots \xi_n^r$; $N = \{x \in \partial\Omega: \xi(x) \text{ определена}\}$.

Тогда семейство $\{K_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ образует слабо аппроксимационную шкалу.

Теорема 3. Пусть выполнено следующее: существуют такие положительные постоянные C_1 и δ , что для любой функции $g \in G(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$,

$$\sup_{|h| \leq s} \|\Delta_h^{l+1} g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \geq C_1 s^\delta, \quad s \in [0, \delta]. \quad (3)$$

Тогда семейство $\{K_\tau\}_{\tau \in [0, 1]}$ образует моментную шкалу.

4°. В заключение приведем одно утверждение, использованное при доказательстве теоремы 3. Как нам кажется, оно может представить самостоятельный интерес.

Теорема 4. Пусть $G: \Gamma \rightarrow 2^{\mathcal{L}_p(\Omega)}$ — отображение, описанное в п. 3°. Если выполнено условие (3) теоремы 3, то найдутся такие положительные постоянные A и B , что для любой функции $u \in W_p^l(\Omega)$, удовлетворяющей условию

$$\left\| u - \sum_{\gamma \in \Gamma} (M_\gamma, G(\gamma)) \right\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq A \max_{\gamma \in \Gamma} \max_{g \in G(\gamma)} |M_\gamma(g)|,$$

имеет место оценка

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \geq B \max_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \left\| u - \sum_{\gamma \in \Gamma} (M_\gamma, G(\gamma)) \right\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}^{1-1/\gamma} \max_{g \in G(\gamma)} |M_\gamma(g)|^{1/\gamma} \right\}.$$

Автор выражает искреннюю признательность проф. И. Б. Симоненко за постоянное внимание к работе и полезные советы.

Ростовский государственный университет

Поступило
29 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Б. Симоненко, Математич. сб., т. 87 (129), № 2, 236 (1972). ² Л. В. Коледов, Математич. анализ и его прилож., т. 6, 238 (1974). ³ В. А. Кондратьев, Тр. Московск. математич. общ., т. 16, 207 (1967). ⁴ М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. ⁵ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1966.