Доклады Академии наук СССР
1976. Том 228, № 6

УДК 62–50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Член-корреспондент АН СССР Я. З. ЦЫПКИН

ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Многие задачи построения оптимальных систем связи, радиолокации, управления сводятся к минимизации средней функции потерь ([1], [2])

$$J(\mathbf{c})=M_{\mathbf{z}}\{F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})]\}=\int_{z}p(\mathbf{z})F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})]d\mathbf{z}\to\min, \tag{1}$$

где $F[\varepsilon]$ – функция потерь, $\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})$ – отклонение действительного результата от желаемого, $\mathbf{z}$ – случайный вектор с плотностью распределения $p(\mathbf{z})=p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)$, $\mathbf{c}$ – вектор параметров – решение; выбор $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$ минимизирует среднюю функцию потерь (1).

Если $p(\mathbf{z})$ известно, то (1) соответствует задаче оптимизации в условиях риска. Если же $p(\mathbf{z})$ неизвестно, то (1) соответствует задаче оптимизации в условиях неопределенности.

При формулировке и решении задач оптимизации целесообразно их подразделить на два класса:

1) задачи моделирования, для которых первостепенным является величина минимума потерь $J^*=\min\limits_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c})$;

2) задачи оценивания, для которых первостепенным является оптимальное решение $\mathbf{c}^*=\arg\min\limits_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c})$.

2. Для нахождения оптимального решения $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$ при неизвестной $p(\mathbf{z})$ широко используются вероятностные итеративные алгоритмы или адаптивные алгоритмы типа стохастической аппроксимации ([2])

$$\mathbf{c}[n]=\mathbf{c}[n-1]-\Gamma[n]F'[\varepsilon(\mathbf{z}[n],\mathbf{c}[n-1])]\nabla_{\mathbf{c}}\varepsilon(\mathbf{z}[n],\mathbf{c}[n-1]),$$
$$\mathbf{c}[0]=\mathbf{c}_1, \tag{2}$$

где $\Gamma[n]>0$ – некая положительно определенная матрица и, в частности, диагональная, $F'[\varepsilon]$ – производная функции потерь, а $\nabla_{\mathbf{c}}\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})$ – градиент по $\mathbf{c}$ отклонения $\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})$.

Несмотря на выполнение условий сходимости ([3]) адаптивных алгоритмов (2), они часто оказываются неэффективными, а оценки $\mathbf{c}[n]$, порождаемые ими, обладают нестабильностью. Причина этого в значительной мере состоит в произволе, связанном с выбором функции потерь $F[\varepsilon]$, и в неучете имеющейся априорной информации. Возникает задача такого учета априорной информации, при котором эффективность адаптивных алгоритмов повысилась бы и даваемые ими оценки обладали бы стабильностью.

3. Покажем, что учет априорной информации сводится к выбору надлежащей функции потерь. Для этого введем понятие средней меры неопределенности

$$H(\mathbf{c},\mathbf{c}^*)=J(\mathbf{c})-J(\mathbf{c}^*)=\int_{z}p(\mathbf{z})\{F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})]-F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c}^*)]\}dz. \tag{3}$$

Предположим, что мера неопределенности

$$F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c})]-F[\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{c}^*)]=G[p(\mathbf{z}|\mathbf{c});\quad p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)] \tag{4}$$

удовлетворяет условиям выпуклости, дифференцируемости и аддитивности. Последнее означает, что мера неопределенности для статистически независимых двух случайных векторов равна сумме их мер неопределенности. Эти условия однозначно определяют меру неопределенности ([4]).

$$G[p(\mathbf{z}|\mathbf{c}); p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)] = \log \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)}{p(\mathbf{z}|\mathbf{c})}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$F[\varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{c})] = -\log p(\mathbf{z}|\mathbf{c}). \tag{6}$$

Поскольку $\log p(\mathbf{z}, \mathbf{c})$ представляет собой функцию правдоподобия ([5]), то из (6) следует, что функция потерь равна функции неправдоподобия. Подставляя (6) в (1), получим среднюю функцию неправдоподобия

$$J(\mathbf{c}) = -M_z\{\log p(\mathbf{z}|\mathbf{c})\} = -\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c})\, d\mathbf{z}. \tag{7}$$

Функцию потерь, определяемую равенством (6), назовем согласованной.

При $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$ из (7) находим минимальное значение средней функции потерь или для согласованной функции потерь — минимальное значение средней функции неправдоподобия

$$J(\mathbf{c}^*) = -\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, d\mathbf{z}. \tag{8}$$

Минимальное значение средней функции неправдоподобия (8) *совпадает с относительной энтропией или мерой количества информации Шеннона* ([4]).

4. Для несогласованной функции потерь $F[\varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{c})] = -\log q(\mathbf{z}|\mathbf{c})$ средняя функции потерь

$$J_q(\mathbf{c}) = -M_z\{\log q(\mathbf{z}|\mathbf{c})\} = -\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log q(\mathbf{z}|\mathbf{c})\, d\mathbf{z} \tag{9}$$

отличается от средней функции неправдоподобия (7). Предположим, что $J_q(\mathbf{c})$ достигает минимума при $\mathbf{c}=\mathbf{c}_q^*$ и, в частности, $\mathbf{c}_q^*$ может быть равно $\mathbf{c}^*$. Полагая в (9) $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$ и вычитая $J_q(\mathbf{c}_q^*)$ из $J(\mathbf{c}^*)$ (8), получим

$$J(\mathbf{c}^*) - J_q(\mathbf{c}_q^*) = \int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log \frac{q(\mathbf{z}|\mathbf{c}_q^*)}{p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)}\, d\mathbf{z}. \tag{10}$$

Используя очевидное неравенство $\log(q/p) \leqslant q/p - 1$, из (10) находим

$$J(\mathbf{c}^*) \leqslant J_q(\mathbf{c}_q^*), \tag{11}$$

причем равенство достигается лишь при $q=p$. Отсюда следует, что *для согласованной функции потерь величина минимума средней функции потерь наименьшая*. Этот вывод служит дополнительным обоснованием распространенного в статистике метода максимального правдоподобия ([5]) и принципиально решает задачу оптимизации в условиях риска. Априорная информация, состоящая в знании распределения $p(\mathbf{z})$, полностью определяет функцию потерь, а значит, и среднюю функцию потерь, совпадающую со средней функцией неправдоподобия.

5. Часто столь полная априорная информация, как знание распределения $p(\mathbf{z})$, отсутствует. Поэтому согласованную функцию потерь (6) определить невозможно. Различные приближения к согласованной функции

потерь, вытекающие из эвристических соображений, как правило, приводят к неэффективным алгоритмам, дающим нестабильные оценки. Однако в нашем распоряжении обычно имеется неполная априорная информация, например, принадлежность плотности распределений $p(\mathbf{z})$ какому-либо классу $\mathcal{P}$, характеризуемому ограниченностью моментов, сосредоточенностью $p(\mathbf{z})$ в заданном интервале и т. п. Эти сведения позволяют сформулировать вариационные задачи, решения которых определяют наименее благоприятные распределения $p_0(\mathbf{z}|\mathbf{c})$, а значит, согласно (6), и наименее благоприятные функции потерь $F_0[\varepsilon]$. Такие функции потерь $F_0[\varepsilon]$ можно назвать гарантирующими, так как они для любого распределения заданного класса распределений дают меньшее минимальное значение функции потерь или менее чувствительное решение.

Для задачи моделирования вариационная задача определения наименее благоприятного распределения формулируется следующим образом:

$$J(\mathbf{c}) = -\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c})\, dz \to \max_p \min \tag{12}$$

при дополнительных условиях

$$\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c})\, d\mathbf{z} = 1, \quad p \geqslant 0, \quad p \in \mathcal{P}. \tag{13}$$

Определяемое этой вариационной задачей *наименее благоприятное распределение доставляет средней функции потерь или, что эквивалентно* (при $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$), *мере информации Шеннона максимальное значение.*

Для задачи оценивания целесообразно от средней функции потерь потребовать минимальную чувствительность по отношению к оцениваемому решению $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$. Поскольку при оптимальном решении

$$\nabla J(\mathbf{c}^*) = \int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, \nabla_{\mathbf{c}} \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, d\mathbf{z} = 0, \tag{14}$$

то *чувствительность* $J(\mathbf{c})$ *при* $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$ *определяется матрицей вторых производных*

$$I = \nabla^2 J(\mathbf{c}^*) = \int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, \nabla_{\mathbf{c}}^2 \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, d\mathbf{z}, \tag{15}$$

представляющей собой информационную матрицу Фишера ([5], [6]).

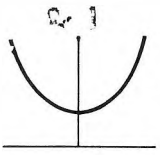
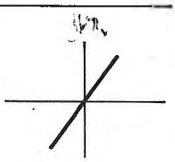
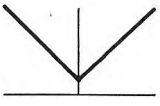
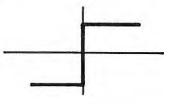
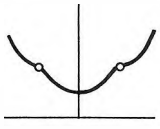
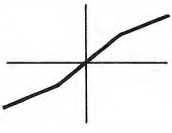
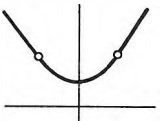
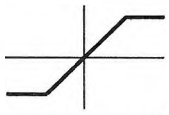
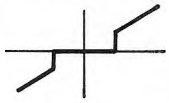
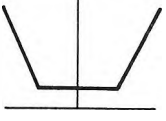
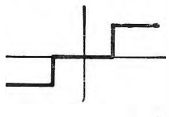
Вариационная задача определения наименее благоприятного распределения для задачи оценивания формулируется следующим образом:

$$J(\mathbf{c}) = -\int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*) \log p(z|c)\, dz \to \min_{\mathbf{c}}; \tag{16}$$

$$I = \nabla_{\mathbf{c}}^2 J(\mathbf{c}^*) = \int_z p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, \nabla_{\mathbf{c}}^2 \log p(\mathbf{z}|\mathbf{c}^*)\, d\mathbf{z} \to \min_p \tag{17}$$

при дополнительных условиях (13). Решение этих вариационных задач определяет в конечном итоге функцию потерь (6), а тем самым и адаптивный алгоритм ([2]), обладающий свойством стабильности и помехоустойчивости. Результаты решения вариационных задач для наиболее естественной априорной информации сведены в табл. 1, где наряду с гарантирующими функциями потерь $F_0[\varepsilon]$ приведены их производные $F_0'[\varepsilon]$, фигурирующие в адаптивном алгоритме.

Таблица 1

№ п. п.	Задача моделирования $J^* = \min_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c})$	Задача оценивания $\mathbf{c}^* = \arg\min_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c})$	Гарантирующая функция потерь $F_0[\varepsilon]$	Производная $F_0'[\varepsilon]$
1	$p(z)$ любое $\int_{\mathbf{Z}} z^2 p(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \leqslant \sigma^2$			
2	$\int_{\mathbf{Z}} \lvert \mathbf{z} \rvert\, p(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \leqslant a$	$p(0) = a > 0$		
3	$p(\mathbf{z}) = (1-\alpha)\, p_0(\mathbf{z}) + \alpha p_1(\mathbf{z})$ $p_0(z)$ нормальное $\int_{\mathbf{Z}} z^2 p_k(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \sigma^2_k,\ k = 0, 1,$ $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_0^2$			
4	$p_0(\mathbf{z})$ нормальное $\int_{\mathbf{Z}} \lvert \mathbf{z} \rvert\, p_1(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \leqslant a$	$p_1(z)$ любое		
5	$p_0(z)$ равномерное $\int_{\mathbf{Z}} z^2 p_1(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \leqslant \sigma_1^2$			
6	$p_0(z)$ равномерное $\int_{\mathbf{Z}} \lvert \mathbf{z} \rvert\, p_1(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \leqslant a$	$p_1(z)$ любое		

Отметим, что функции вида 4 табл. 1 для задачи оценивания были найдены из иных соображений в работах ([7], [8]). Использование гарантирующих функций потерь $F_0[\varepsilon]$ в адаптивных алгоритмах повышает их эффективность и придает оцениваемым решениям свойство стабильности.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
1 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Д. Миддлтон,* Введение в статистическую теорию связи, М., 1962. [2] *Я. З. Цыпкин,* Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968. [3] *Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин,* Автоматика и телемеханика, № 3 (1973). [4] *К. Шеннон,* Работы по теории информации и кибернетике, М., 1963. [5] *Г. Крамер,* Математические методы статистики, М., 1976. [6] *M. S. Bartlett,* Symposium on Information Theory, London, 1950. [7] *P. J. Huber,* Ann. Math. Statistics, v. 35, № 1, 73 (1972). [8] *P. J. Huber,* Ann. Statisctics, v. 1, № 5, 799 (1973).