

Г. И. ЧЕРТАНОВ

НАСЛЕДСТВЕННО НОРМАЛЬНЫЕ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБРАЗЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 II 1976)

В заметке изучаются свойства непрерывных образов упорядоченных пространств. Как известно, упорядоченные пространства являются наследственно нормальными. Неразъясненные обозначения и определения можно найти в ⁽¹⁾. Если $\lambda(X)$ — кардинальнозначная функция на топологическом пространстве X , то через $h\lambda(X)$ обозначается $\sup \{\lambda(Y) : Y — подпространство X\}$. Все отображения предполагаются, если не оговорено противное, непрерывными и «на», а пространства — T_2 . Подпространства линейно упорядоченных пространств (л.у.п.) обычно называются обобщенно упорядоченными пространствами (о.у.п.) (см. ⁽²⁾). Трейбигу принадлежит результат о том, что бикompактное о.у.п. является линейно упорядоченным бикompактом (л.у.б.), т. е. базу топологии образуют открытые интервалы ⁽³⁾. Но в работе ⁽²⁾ показывается, что ни открытые, ни замкнутые подпространства л.у.п., вообще говоря, не являются л.у.п. Следующий результат принадлежит Трейбигу и помещен в ⁽³⁾.

Р1. Если произведение двух бесконечных бикompактов X, Y является образом л.у.б., то X и Y метризуемы.

Этот результат в настоящей заметке получает в классе о.у.п. окончательное обобщение.

Определение 1. Подмножество B линейно упорядоченного множества X называется выпуклым в X тогда и только тогда, когда для любых двух точек $a, b \in B$ имеем $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\} \subseteq B$.

Определение 2. Выпуклой компонентой x в множестве $M \subset X$ назовем максимальное выпуклое в X множество B со свойством $x \in B \subset M$.

Легко проверяется, что выпуклая компонента однозначно определена для каждой точки $x \in M$ и что выпуклые компоненты различных точек из M либо совпадают, либо не пересекаются.

Предложение 1. Если X — о.у.п., то выпуклые компоненты точек открытого множества $U \subset X$ открыты в X , выпуклые компоненты точек замкнутого множества $F \subset X$ замкнуты в X .

Определение 3. Пусть X — линейно упорядоченное множество. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется легким ⁽⁴⁾, если для каждой точки $y \in Y$ и для каждой точки $x \in f^{-1}y$ выпуклая компонента x в $f^{-1}y$ есть сама точка x .

Теорема 1. Пусть K — о.у.п., Y — T_1 -пространство и $f: K \rightarrow Y$ — отображение.

Тогда существуют: а) о.у.п. X ; б) легкое отображение $g: X \rightarrow Y$; в) замкнутое отображение $\varphi: K \rightarrow X$. При этом $f = g\varphi$. Если f было замкнутым, то замкнуто и g ; если f было открытым, то открыто и g .

Доказательство. Так как Y — T_1 -пространство, то $f^{-1}y$ замкнуто в K . По предложению 1, $f^{-1}y$ распадается на выпуклые в K замкнутые компоненты. Пусть $\mathcal{R} = \{B : \text{найдется } y \in Y : B \text{ есть выпуклая компонента } f^{-1}y\}$. Легко проверяется, что $\mathcal{R}$ есть непрерывное разбиение K . Можно проверить, что на элементах $\mathcal{R}$ можно естественным образом ввести ли-

нейный порядок, положив $B_1 < B_2$ тогда и только тогда, когда для любых точек $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ имеем $x_1 < x_2$. Положим $X = K/\mathcal{R}$ и $\varphi: K \rightarrow X$ — естественное отображение пространства K на пространство разбиения X . Можно проверить, что на X фактор-топология является топологией о.у.п. для введенного таким образом порядка. Теперь положим $gx = f\varphi^{-1}x$ для каждой точки $x \in X$. Можно проверить, что g удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.

При легких отображениях некоторые «хорошие» свойства образа передаются к прообразу, например, справедлива

Теорема 2. Пусть K — о.у.п., Y — T_1 -пространство и $f: K \rightarrow Y$ — легкое отображение.

Тогда $\chi(K) \leq \psi(Y)$. В частности, если Y удовлетворяет 1-й аксиоме счетности или в Y каждая точка есть G_δ , то K удовлетворяет 1-й аксиоме счетности.

Предложение 2. Пусть X — л.у.б., M — плотное подмножество X и $x \in X$, причем $\chi(x, X) = \tau \geq \aleph_0$. Пусть Ω_τ — пространство трансфинитов, не превосходящих первого мощност τ .

Тогда существует гомеоморфное и сохраняющее порядок отображение «в» $\varphi: \Omega_\tau \rightarrow X$, при котором $\varphi\omega_\tau = x$, и если ξ — неперелый трансфинит, то $\varphi\xi \in M$.

Теперь легко доказать, что если X о.у.п., то $\chi(x, X)$ есть регулярное кардинальное число для каждой точки $x \in X$.

Из предложения 2 методом «от противного» выводится теорема 2. Для доказательства также необходимо заметить, что при легких отображениях образ неизолрированной точки $x \in K$ есть неизолрированная в Y точка.

Предложение 3. Пусть K — счетно-компактное о.у.п., Y — бикомпакт счетного характера, $f: K \rightarrow Y$ — замкнутое отображение и $X = [M]$, где M — взаимно однозначный прообраз Y .

Тогда X — л.у.б. счетного характера.

Теорема 3. Пусть K — о.у.п. Если существует замкнутое отображение $f: K \rightarrow Y$, то $i(Y) \leq \psi(Y) \leq hic(Y) \leq hc(Y) = c(Y)$. Если $c(Y) \leq \aleph_0$, то Y — совершенно нормальное наследственно финально-компактное пространство Фреше — Урысона.

Доказательство. а) Пусть M — дискретное подпространство Y , $\{U_\gamma: \gamma \in M\}$ — семейство открытых подмножеств Y таких, что для каждого $y \in M$ имеем $U_\gamma \cap M = y$. Пусть $V_\gamma = f^{-1}U_\gamma$. По предложению 1, V_γ распадается на выпуклые открытые компоненты W_α . Пусть $\gamma = \{W_\alpha: W_\alpha \cap f^{-1}M \neq \emptyset, \alpha \in A\}$. Легко проверить, что никакое $W_\alpha \in \gamma$ не содержится в сумме остальных множеств из γ . Но тогда каждое W_α может пересекаться не более чем с двумя другими множествами из γ и можно построить по γ систему $\delta = \{G_\alpha: \alpha \in A\}$, состоящую из дизъюнктивных, выпуклых, открытых и непустых подмножеств K и покрывающую $f^{-1}M$. Для каждого $y \in M$ однозначно определено $A(y)$ такое, что $f^{-1}y \subset \bigcup \{G_\alpha: \alpha \in A(y)\} = G_y \subset V_y$. Легко видеть, что $G_{y_1} \cap G_{y_2} = \emptyset$ при $y_1 \neq y_2$ и что система $\{G_y\}$ покрывает $f^{-1}M$. Ввиду замкнутости отображения f множества $G_y^* = Y \setminus f(Y \setminus G_y)$ дизъюнктивны, открыты в Y и $M \cap G_y^* = y$. Это означает, что $hc(Y) = c(Y)$.

б) Для доказательства неравенства $hic(Y) \leq c(Y) = hc(Y)$ понадобятся следующие результаты.

P2 ⁽⁵⁾. Пусть γ — открытое покрытие пространства X .

Тогда существуют $\gamma' \subset \gamma$ и $F \subset X$ такие, что $|\gamma'| \leq hc(X)$, $s(F) \leq hc(X)$ и $X = F \cup \bigcup \{V: V \in \gamma'\}$.

P3 ⁽⁶⁾. Если K — линейно упорядоченное пространство, то $hic(K) \leq c(K) \leq s(K)$.

Будем использовать очевидный факт, что при непрерывных отображениях индекс компактности образа не превосходит индекса компактности прообраза. Пользуясь P2 и уже доказанным п.а), выделяем из данной системы γ открытых в Y множеств подсистему γ' и множество F , лежащее в $\bigcup \{V: V \in \gamma'\}$, такие, что $s(F) \leq c(Y)$, $|\gamma'| \leq c(Y)$ и $\bigcup \{V: V \in \gamma'\} =$

$=FU \cup \{V: V \in \gamma'\}$. Пусть M плотно в F и $|M|=s(F)$. Пусть M_0 — взаимно однозначный прообраз M и $F_0=[M_0]$. Ввиду замкнутости f имеем $fF_0 \supset F$, значит, существует $\Phi \subset F_0$ такое, что $f\Phi = F$. По РЗ, $ic(F) \leq ic(\Phi) \leq ic(F_0) \leq s(F_0) \leq c(Y)$, следовательно, существует $\gamma'' \subset \gamma$ такая, что $|\gamma''| \leq c(Y)$ и γ'' покрывает F . Тогда $\gamma'' \cup \gamma'$ — искомая подсистема системы γ .

в) Докажем большее, а именно, для каждого F , замкнутого в Y , выполнено $\psi(F, Y) \leq c(Y)$, что эквивалентно следующему: для каждого U , открытого в Y , найдется семейство ξ замкнутых подмножеств Y , лежащих в U , такое, что $|\xi| \leq c(Y)$ и $U = \bigcup \{F: F \in \xi\}$. Но последнее утверждение легко выводится из б) и нормальности Y .

г) Теперь используем теорему 1 и найдем о.у.п. X , которое замкнуто и легко отображается на Y . По теореме 2, имеем $\chi(X) \leq \psi(Y) \leq c(Y)$, значит, и $t(X) \leq c(Y)$. Поскольку при замкнутых отображениях теснота не увеличивается, то и $t(Y) \leq t(X) \leq c(Y)$.

д) Если $c(Y) \leq \aleph_0$, то из предыдущего следует, что Y — совершенно нормальное наследственно финально-компактное пространство и существует о.у.п. X с 1-й аксиомой счетности, замкнуто и легко отображающееся на Y . Тогда ((¹), стр. 96—97, з. 316, 311) Y есть пространство Фреше — Урысона.

Определение 4. T_2 -пространство X будем называть сильно-счетно-компактным, если $[M]$ — бикомпакт для любого счетного $M \subset X$.

Предложение 4. а) Всякое сильно-счетно-компактное пространство счетно-компактно; б) счетно-компактное о.у.п. является сильно-счетно-компактным пространством; в) класс сильно-счетно-компактных пространств замкнут относительно операций произведения, Σ -произведения, непрерывного отображения в классе T_2 -пространств, перехода к прообразу при совершенном отображении; г) если T_2 -пространство имеет счетную тесноту и является образом сильно-счетно-компактного пространства при отображении f , то f замкнуто; д) если X — подпространство T_2 -экстремально несвязного пространства и сильно-счетно-компактно, то замыкание в X любого дискретного счетного подмножества гомеоморфно βN .

Пространство $\beta N \setminus \{x\}$, где $x \in \beta N \setminus N$ счетно-компактно, но не сильно-счетно-компактно. Подпространство трансфинитов $\leq \omega_2$, содержащее все трансфиниты не более чем счетного характера и ω_2 , дает пример сильно-счетно-компактного о.у.п. не k -пространства.

Через αN будем обозначать одноточечную компактификацию дискретного пространства мощности $\aleph_1$, через αN — простейший счетный бикомпакт. Легко видеть, что $\alpha N_1 \times \alpha N$ имеет счетную тесноту, но не наследственно нормально. Применяя п.г) предложения 4 и очевидный факт, что наследственная нормальность сохраняется при замкнутых отображениях, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Если пространство X содержит замкнутое подмножество, которое можно отобразить на $\alpha N_1 \times \alpha N$, то X не может быть образом никакого наследственно нормального сильно-счетно-компактного пространства.

Легко видеть, что βN не наследственно нормально и что Σ -произведение несчетного числа изолированных двоеточий содержит $\alpha N_1 \times \alpha N$. По одному из результатов Ефимова (⁷), любой неметризуемый диадический бикомпакт содержит замкнутое подмножество, которое отображается на $D^{\aleph_1}$. Отсюда и из леммы 1 получаем

Предложение 5. Пусть X есть образ наследственно нормального сильно-счетно-компактного пространства.

Тогда: а) если X — диадический бикомпакт, то он метризуем; б) если X является произведением или Σ -произведением некоторого числа T_1 -пространств, то все они, кроме счетного числа, одноточечны; в) если X есть подпространство T_2 -экстремально несвязного пространства, то X конечно.

Лемма 2. Пусть X, Y — бесконечные T_2 -пространства, K — наследст-

венно нормальное сильно счетно-компактное пространство. Если $X \times Y$ является образом K , то отображение $f: K \rightarrow X \times Y$ замкнуто, $X \times Y$ наследственно нормально, X и Y — совершенно нормальные бикомпакты.

Доказательство. Ввиду п. в) предложения 4, X и Y сильно счетно-компактны, а по лемме 1 должны наследственно удовлетворять условию Суслина. Применяя Р2 Шапировского, получаем, что X и Y финально-компактны, значит, бикомпакты счетной тесноты (см. ⁽⁸⁾). Тогда, по теореме Малыгина из ⁽⁹⁾, $X \times Y$ тоже имеет счетную тесноту. По п.г) предложения 4, отображение f замкнуто, следовательно, $X \times Y$ наследственно нормально. Тогда (⁽¹⁾, стр. 159, з. 234) X и Y — совершенно нормальные бикомпакты.

Теорема 4. Пусть K — счетно-компактное о.у.п., X и Y — бесконечные T_2 -пространства. Если $X \times Y$ является образом K , то X и Y — метрические компакты.

Доказательство. По п.б) предложения 4, K сильно счетно-компактно, а по лемме 2 X и Y — совершенно нормальные бикомпакты, следовательно, $X \times Y$ удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Из предложения 3 следует, что существует F — бикompактное подпространство K такое, что $fF = X \times Y$. Далее пользуемся Р1 Трейбига.

Если K — нормальное, но не счетно-компактное пространство, то его можно отобразить на Y^2 , где Y — неметризуемое пространство. Это Y — либо фактор-пространство действительной прямой по разбиению $\mathcal{R} = \{Z\} \cup \{\{x\}: x \in R \setminus Z\}$, где Z — множество целых чисел, либо счетное плотное подпространство I^c .

Пусть Y и K — подпространства соответственно пространства трансфинитов $\leq \omega_1$ и пространства трансфинитов $\leq \omega_1^2$, состоящие: а) из всех неперечислимых трансфинитов, б) из всех трансфинитов несчетного характера. Легко видеть, что K гомеоморфно Y^2 и финально-компактно.

Используя методы, развитые автором в ⁽¹⁰⁾, и п.д) предложения 4, можно доказать

Предложение 6. Пусть Y — подпространство T_2 -экстремально несвязного пространства. $X = \prod \{X_\alpha: \alpha \in A\}$, где X_α — счетно-компактные о.у.п. Если Y есть непрерывный образ X , то Y конечно.

Пользуюсь возможностью, чтобы выразить благодарность проф. В. И. Пономареву за внимание и ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., «Наука», 1974. ² D. I. Lutzer, Rozprawy mat., v. 89, 5 (1971). ³ L. B. Treybig, Proc. Am. Math. Soc., v. 15, № 5, 866 (1969). ⁴ С. Мардешич, П. Панич, ДАН, т. 143, № 3, 529 (1962). ⁵ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 202, № 4, 779 (1972). ⁶ D. I. Lutzer, H. R. Bennett, Proc. Am. Math. Soc., v. 23, № 3, 664 (1969). ⁷ Б. А. Ефимов, ДАН, т. 185, № 5, 987 (1969). ⁸ A. V. Archangelskii, Proc. of the III Prague Symp., 1971, p. 37. ⁹ В. И. Малыгин, ДАН, т. 203, 1001 (1972). ¹⁰ Г. И. Черганов, ДАН, т. 223, 1322 (1975).