Доклады Академии наук СССР
1976. Том 228, № 6

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Л. Б. ШАПИРО

ПРОСТРАНСТВО ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ $D^{\aleph_2}$ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ДИАДИЧЕСКИМ БИКОМПАКТОМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 13 II 1976)

Настоящая работа посвящена решению известной задачи: является ли пространство замкнутых подмножеств диадического бикомпакта X (в топологии Виеториса; в дальнейшем обозначается $\exp X$) диадическим бикомпактом. Заметим, что в силу теоремы П. С. Александрова пространство замкнутых подмножеств канторова совершенного множества $D^{\aleph_0}$, будучи нульмерным компактом без изолированных точек, гомеоморфно $D^{\aleph_0}$. Сформулированная задача приобрела особый интерес после того, как в ([1]) было доказано, что $\exp D^{\aleph_1}$ гомеоморфно $D^{\aleph_1}$. Как будет показано ниже, этот результат является в некотором смысле окончательным, а именно: уже $\exp D^{\aleph_2}$ не является диадическим бикомпактом.

1. Лемма 1. *Пусть X — бикомпакт, $wX\leqslant\tau$, $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega(\tau^+)}$ — убывающая система замкнутых подмножеств в X ($\alpha>\beta$ влечет $F_\alpha\subseteq F_\beta$).*

Тогда существует $\gamma<\omega(\tau^+)$: $F_\delta=F_\gamma$ для любого $\delta>\gamma$.

Определение 1 ([2]) Пусть $D^\tau=\prod\limits_{\alpha\in\theta}D_\alpha$, $v\subset\theta$, $i(v)=\{i_\alpha\}\in\prod\limits_{\alpha\in v}D_\alpha$.

Слоем с основанием v называется подмножество $H_v^{i(v)}=\{\{x_\alpha\}\in D^\tau: x_\alpha=i_\alpha\}$ для всех $\alpha\in v$.

Заметим, что слой с основанием v можно определить и так: пусть π_v: $\prod\limits_{\alpha\in\theta}D_\alpha\to\prod\limits_{\alpha\in v}D_\alpha$ — естественная проекция и $\xi=\{i_\alpha\}\in\prod\limits_{\alpha\in v}D_\alpha$. Тогда $H_v^{i(v)}=\pi_v^{-1}(\xi)$. Отметим также ([2]), что $\chi\left(H_v^{i(v)},\ \prod\limits_{\alpha\in\theta}D_\alpha\right)=|v|$.

Лемма 2. *Непустое пересечение любого числа слоев есть слой.*

Лемма 3 ([2]). *Для всякого замкнутого $F\subset\prod\limits_{\alpha\in\theta}D_\alpha$ существует $v\subset\theta$: $|v|\leqslant\chi(F,\ \prod\limits_{\alpha\in\theta}D_\alpha)$, $F=\pi_v^{-1}(\pi_v(F))$.*

Лемма 4. *Пусть бикомпакт $X=\varprojlim\{X_\alpha,\ \varpi_\alpha^\beta:\ \alpha<\beta<\omega_2\}$; $F=[F]\subset X$ и $\chi(F,X)\leqslant\aleph_1$.*

Тогда существует такой индекс $\alpha_0<\omega_2$, что $F=\varpi_{\alpha_0}^{-1}\varpi_{\alpha_0}F$.

Доказательство этой леммы легко следует из ([3]), стр. 147, предложение 10.

Лемма 5 ([1]). *Пусть бикомпакт $X=\varprojlim\{X_\alpha,\ \varpi_\alpha^\beta:\ \alpha<\beta<\omega_2\}$, причем все проекции ϖ_α^β являются отображениями «на» и $X_\gamma=\varprojlim\{X_\alpha,\ \varpi_\alpha^\beta:\ \alpha<\beta<\gamma\}$ для любого предельного $\gamma<\omega_2$.*

Тогда $\exp X=\varprojlim\{\exp X_\alpha,\ \exp\varpi_\alpha^\beta:\ \alpha<\beta<\omega_2\}$, причем все проекции $\exp\varpi_\alpha^\beta$ являются отображениями «на» и $\exp X_\gamma=\varprojlim\{\exp X_\alpha,\ \exp\varpi_\alpha^\beta:\ \alpha<\beta<\gamma\}$ для любого предельного $\gamma<\omega_2$ ($\exp\varpi_\alpha^\beta(\hat F)=\varpi_\alpha^\beta(F)$, обозначения заимствованы из ([1])).

Лемма 6. *Если* $f\colon X\to Y$ *— непрерывное отображение бикомпактов и* $\{F_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ *— вполне упорядоченная по включению убывающая система замкнутых в* X *множеств, то* $f(\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} F_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} f(F_\alpha)$.

Доказательство можно найти в ([3]), стр. 333.

2. Лемма 7. *Пусть* X, Y, Z *— бикомпакты;* $f\colon Y\to Z$ *и* $\pi\colon Y\to X$ *— непрерывные отображения «на»;* $wX\leqslant\tau$.

Тогда существуют $x_0\in X$ *и* $F=[F]\subset\pi^{-1}(x_0)$ *такие, что* $\chi(f(F),Z)\leqslant\tau$.

Доказательство. Предположим, что таких x_0 и F не существует. Тогда построим систему замкнутых подмножеств Y, удовлетворяющую следующим условиям:

1) если $\alpha<\beta<\omega(\tau^+)$, то $F_\beta\subseteq F_\alpha$;
2) если $\alpha<\beta<\omega(\tau^+)$, то $\pi(F_\beta)\subsetneq\pi(F_\alpha)$;
3) $\chi(f(F_\alpha),Z)\leqslant\tau$ для любого $\alpha<\omega(\tau^+)$.

Положим $F_0=Y$. Пусть для всех $\alpha<\alpha_0$ мы построили систему $\{F_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, удовлетворяющую условиям 1)—3). Рассмотрим два случая.

1 случай. α_0 — предельное трансфинитное число. Тогда положим

$$F_{\alpha_0}=\bigcap_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha.$$

В силу леммы 6 $f(F_{\alpha_0})=\bigcap\limits_{\alpha<\alpha_0} f(F_\alpha)$.

$$\chi(f(F_{\alpha_0}),Z)\leqslant\sum_{\alpha<\alpha_0}\chi(f(F_\alpha),Z)\leqslant\tau,$$

так как $\alpha_0<\omega(\tau^+)$, т. е. F_{α_0} удовлетворяет условиям 1)—3).

2 случай. $\alpha_0=\beta+1$. Пусть $x_\beta\in\pi(F_\beta)$. Тогда $f(\pi^{-1}x_\beta\cap F_\beta)\neq f(F_\beta)$, так как в противном случае точка x_β и множество $\pi^{-1}x_\beta\cap F_\beta$ удовлетворяли бы требованиям леммы. Следовательно, существует замкнутое множество $C_{\alpha_0}\subset f(F_\beta)\setminus f(\pi^{-1}x_\beta\cap F_\beta)$ такое, что $\chi(C_{\alpha_0},\ f(F_\beta))\leqslant\aleph_0$. Следовательно, $\chi(C_{\alpha_0},\ Z)\leqslant\tau$. Положим $F_{\alpha_0}=F_\beta\cap f^{-1}C_{\alpha_0}$. Проверим выполнение условий 1)—3):

1) $F_{\alpha_0}\subseteq F_\beta$ по построению;
2) $x_\beta\in\pi(F_\beta)\setminus\pi(F_{\alpha_0})$, следовательно $\pi(F_{\alpha_0})\subsetneq\pi(F_\beta)$;
3) $f(F_{\alpha_0})=C_{\alpha_0}$, так как $C_{\alpha_0}\subset f(F_\beta)$, следовательно $\chi(f(F_{\alpha_0}),\ Z)\leqslant\tau$.

Таким образом, предположив, что наша лемма не верна, мы построили вполне упорядоченную строго убывающую систему замкнутых в X множеств $\{\pi(F_\alpha)\}_{\alpha<\omega(\tau^+)}$, но это противоречит лемме 1, так как $wX\leqslant\tau$. Тем самым лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* X *— бикомпакт,* $D=\{0,1\}$, $\pi\colon D\times X\to X$ *— естественная проекция. Пусть* $F=[F]\subset X$ *и* $c(F)>\aleph_0$.

Тогда $c((\exp\pi)^{-1}(\hat F))>\aleph_0$.

Доказательство. Заметим, что $\hat\Phi\in(\exp\pi)^{-1}(\hat F)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\Phi)=F$.

Так как $c(F)>\aleph_0$, то существует несчетная система $\{V_t\}_{t\in T}$ открытых в X множеств такая, что:

1) $V_t\cap F\neq\emptyset$ для любого $t\in T$;
2) $V_{t_1}\cap V_{t_2}\cap F=\emptyset$ для любых $t_1,\ t_2\in T$, $t_1\neq t_2$.

Для любого $t\in T$ определим

$$W_t=\mathscr{E}\{\hat\Phi\in\exp(D\times X)\colon\ \Phi\subset(\{0\}\times X)\cup(\{1\}\times V_t)\}\cap$$
$$\cap\mathscr{E}\{\hat\Phi\colon\ \Phi\cap(\{1\}\times V_t)\neq\emptyset\}.$$

Нетрудно видеть, что W_t — открытое в $\exp(D\times X)$ множество. Пусть $x_t\in V_t\cap F$, тогда $\Phi=(\{0\}\times F)\cup(\{1\}\times\{x_t\})$ — замкнутое подмножество $D\times X$, $\pi(\Phi)=F$, $\hat\Phi\in W_t$. Следовательно, $W_t\cap(\exp\pi)^{-1}(\hat F)\neq\emptyset$ для любого $t\in T$. Покажем, что $W_{t_1}\cap W_{t_2}\cap(\exp\pi)^{-1}(\hat F)=\emptyset$, если $t_1\neq t_2$. Пусть $\hat\Phi\in W_{t_1}\cap W_{t_2}\cap(\exp\pi)^{-1}(\hat F)$. Так как $\hat\Phi\in(\exp\pi)^{-1}(\hat F)$, то $\pi(\Phi)=F$. Так как

$\hat{\Phi}\in W_{t_1}$, то существует $x_{t_1}\in V_{t_1}\cap F$: $(\{1\}\times\{x_{t_1}\})\in\Phi\cap(\{1\}\times V_{t_1})$. Так как $\hat{\Phi}\in W_{t_2}$, то $\Phi\subset(\{0\}\times X)\cup(\{1\}\times V_{t_2})$. Следовательно, $(\{1\}\times\{x_{t_1}\})\in(\{0\}\times X)\cup(\{1\}\times V_{t_2})$, т. е. $x_{t_1}\in F\cap V_{t_1}\cap V_{t_2}$, что противоречит условию 2. Таким образом, $\{(\exp\pi)^{-1}(\hat{F})\cap W_t\}_{t\in T}$ — несчетная дизъюнктная система непустых открытых в $(\exp\pi)^{-1}(\hat{F})$ множеств. Следовательно, $c((\exp\pi)^{-1}(\hat{F}))>\aleph_0$.

Замечание 1. Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение бикомпактов, $F=[F]\subset Y$, $c(F)>\aleph_0$. Тогда $c(\Phi)>\aleph_0$ для любой точки $\hat{\Phi}\in(\exp f)^{-1}(\hat{F})$.

Теорема. *$\exp D^{\aleph_2}$ не является диадическим бикомпактом.*

Доказательство. Пусть $X=\exp D^{\aleph_2}$. В силу леммы 5 $X=\varprojlim\{X_\alpha,\ p_{\beta,\alpha}\colon \omega_1\leqslant\alpha<\beta<\omega_2\}$, где $X_\alpha=\exp(\prod_{\beta<\alpha}D_\beta)$, $p_{\beta,\alpha}=\exp\pi_\alpha^\beta$ и $X_\gamma=\varprojlim\{X_\alpha,\ p_{\beta,\alpha}\colon \omega_1\leqslant\alpha<\beta<\gamma\}$ для любого предельного $\gamma<\omega_2$.

Предположим, что X — диадический бикомпакт. Тогда существует $f\colon D^\tau\to X$, где $D^\tau=\prod_{\eta\in\theta}D_\eta$ и $|\theta|=\tau\geqslant\aleph_2$. Зафиксируем такую точку $x_{\omega_1}\in X_{\omega_1}=\exp(\prod_{\alpha<\omega_1}D_\alpha)$, которая определяется замкнутым множеством с несчетным числом Суслина (условная запись $c(x_{\omega_1})>\aleph_0$), так как $\chi(x_{\omega_1},X_{\omega_1})\leqslant\aleph_1$, то $\chi(f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1},D^\tau)\leqslant\aleph_1$.

В силу леммы 3 существует $v_1\subset\theta$ такое, что $|v_1|\leqslant\aleph_1$ и $f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}=\pi_{v_1}^{-1}\pi_{v_1}f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}$, где π_{v_1} — естественная проекция.

Так как $f\colon f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}\to p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}$ и $\pi_{v_1}\colon f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}\to\pi_{v_1}f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}$ — непрерывные отображения «на» и $w(\pi_{v_1}f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1})\leqslant\aleph_1$, то в силу леммы 7 существует $\xi_1\in\pi_{v_1}f^{-1}p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}$ и $F_1\subset\pi_{v_1}^{-1}\xi_1=H_1$ такие, что $\chi(f(F_1),\ p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1})\leqslant\aleph_1$. Следовательно, $\chi(f(F_1),\ X)\leqslant\aleph_1$. Тогда в силу леммы 4 существуют $\alpha_1<\omega_2$ и $x_{\alpha_1}\in X_{\alpha_1}$ такие, что $p_{\alpha_1}^{-1}x_{\alpha_1}\subset f(F_1)\subset f(H_1)\subset p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}$. Следовательно, $\alpha_1>\omega_1$. $H_1=\pi_{v_1}^{-1}(\xi_1)$ является слоем с основанием v_1 в D^τ.

Положим $A_1=H_1\cap f^{-1}p_{\alpha_1}^{-1}x_{\alpha_1}$. Пусть для всех $k<n$ построены системы множеств $\{H_k\}$ и $\{A_k\}$, система порядковых чисел $\{\alpha_k\}$ и система точек $\{x_{\alpha_k}\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) H_k — слой в D^τ с основанием v_k, $\chi(H_k,D^\tau)=|v_k|\leqslant\aleph_1$;
2) $x_{\alpha_k}\in X_{\alpha_k}$, $p_{\alpha_k}^{-1}x_{\alpha_k}\subset f(H_k)$;
3) $A_k=H_k\cap f^{-1}p_{\alpha_k}^{-1}x_{\alpha_k}$;
4) $H_{k+1}\subset A_k$.

Построим H_n, A_n, α_n и x_{α_n}, удовлетворяющие условиям 1)—4): $A_{n-1}=H_{n-1}\cap f^{-1}p_{\alpha_{n-1}}^{-1}x_{\alpha_{n-1}}$. Так как $\chi(x_{\alpha_{n-1}},X_{\alpha_{n-1}})\leqslant\aleph_1$, то $\chi(A_{n-1},\ H_{n-1})\leqslant\aleph_1$. В силу леммы 3 существует $v_n\supset v_{n-1}$ такое, что $A_{n-1}=\pi_{v_n}^{-1}\pi_{v_n}A_{n-1}$ и $|v_n|\leqslant\aleph_1$. Из условий (2) и (3) следует, что $f\colon A_{n-1}\to p_{\alpha_{n-1}}^{-1}x_{\alpha_{n-1}}$ является отображением «на», т. е. $f(A_{n-1})=p_{\alpha_{n-1}}^{-1}x_{\alpha_{n-1}}$. В силу леммы 7 существуют $\xi_n\in\pi_{v_n}A_{n-1}$ и $F_n\subset\pi_{v_n}^{-1}\xi_n=H_n$ такие, что $\chi(f(F_n),\ p_{\alpha_{n-1}}^{-1}x_{\alpha_{n-1}})\leqslant\aleph$. В силу леммы 4 существуют $\alpha_n<\omega_2$ и $x_{\alpha_n}\in X_{\alpha_n}$ такие, что $p_{\alpha_n}^{-1}x_{\alpha_n}\subset f(F_n)\subset f(H_n)$.

$H_n=\pi_{v_n}^{-1}\xi_n$ — слой с основанием v_n. $\chi(H_n,\ D^\tau)=|v_n|\leqslant\aleph_1$. $H_n\subset A_{n-1}$ и $p_{\alpha_n}^{-1}x_{\alpha_n}\subset f(H_n)$.

Положив $A_n=H_n\cap f^{-1}p_{\alpha_n}^{-1}x_{\alpha_n}$, закончим построение n-ых членов наших систем. Заметим, что так как $A_{k+1}\subset A_k$, то

$$p_{\alpha_{k+1}}^{-1}x_{\alpha_{k+1}}=f(A_{k+1})\subset f(A_k)=p_{\alpha_k}^{-1}x_{\alpha_k}\subset p_{\omega_1}^{-1}x_{\omega_1}.$$

Так как $X_\beta=\varprojlim\{X_{\alpha_k},\ p_{\alpha_k,\alpha_n}\colon k>n\}$, где $\beta=\sup_n\alpha_n<\omega_2$, то существует

единственная точка $x_\beta \in X_\beta$ такая, что $p_{\beta,\alpha_n}(x_\beta)=x_{\alpha_n}$ и $p_{\beta,\omega_1}(x_\beta)=x_{\omega_1}$. Следовательно, $p_\beta^{-1}x_\beta=\bigcap_n p_{\alpha_n}^{-1}x_{\alpha_n}$. Так как $p_{\beta,\omega_1}(x_\beta)=x_{\omega_1}$, то в силу замечания 1 $c(x_\beta)>\aleph_0$. В силу леммы 8 $c(p_{\beta+1,\beta}(x_\beta))>\lambda_6$. Следовательно, $c(p_\beta^{-1}x_\beta)>\aleph_0$. Так как $A_{k+1}\subset H_{k+1}\subset A_k\subset H_k$, то $\bigcap_k H_k=\bigcap_k A_k$. Но в силу леммы 2 $H=\bigcap_k H_k$ есть слой с основанием $v=\cup v_n$. Но $|v|\leqslant\aleph_1$, следовательно, $H\approx D^\tau$.

Так как $f(A_k)=p_{\alpha k}^{-1}x_{\alpha k}$, то в силу леммы 6

$$f(\bigcap_k A_k)=\bigcap_k f(A_k)=\bigcap_k p_{\alpha_k}^{-1}x_{\alpha_k}=p_\beta^{-1}(x_\beta).$$

Но $f(\bigcap_k A_k)=f(\bigcap_k H_k)=f(H)$ – диадический бикомпакт, а $c(p_\beta^{-1}(x_\beta))>\aleph_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2. При помощи рассуждений, полностью аналогичных приведенным выше, доказывается, что $\exp I^{\aleph_2}$ не является диадическим бикомпактом.

Следствие 1. *Если бикомпакт X отображается на $I^{\aleph_2}$, то* $\exp X$ *не является диадическим бикомпактом.*

Из результатов Б. А. Ефимова и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть X – диадический бикомпакт, $wX\geqslant\aleph_2$.*

Тогда $\exp X$ *не является диадическим бикомпактом.*

Из одного результата Б. Э. Шапировского ([6]) и следствия 1 получаем

Следствие 3. *Пусть X – бикомпакт, $wX\geqslant\mathfrak{c}^+$.*

Тогда $\exp X$ *не является диадическим бикомпактом.*

В ([4]) было показано, что пространство замкнутых подмножеств дантова пространства является дантовым пространством. Таким образом, мы получаем ответ на вопрос, поставленный в ([4]):

Следствие 4. *Существуют дантовы, но не диадические бикомпакты.*

Автор выражает признательность проф. В. И. Пономареву за постоянное внимание и поддержку в работе.

Примечание при корректуре.

Автором доказана следующая

Теорема. *Если* $\exp X$ *является образом произведения бикомпактов, каждый из которых имеет вес, не превосходящий* τ, *то* $wX\leqslant\tau^+$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Сирота*, ДАН, т. 181, № 5, 1069 (1968). [2] *Б. А. Ефимов*, Диадические бикомпакты. Тр. Московск. матем. общ-ва, 14, 1965, стр. 211. [3] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, М., «Наука», 1973. [4] *А. В. Архангельский*, ДАН, т. 184, № 4, 767 (1969). [5] *Б. А. Ефимов*, ДАН, т. 185, № 5, 987 (1969). [6] *Б. Э. Шапировский*, ДАН, т. 223, № 5, 1083 (1975).