Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 5

ГЕОФИЗИКА

Д. В. ЧАЛИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 23 IV 1976)

Целью настоящей работы является исследование структуры возмущений в пограничном слое, создаваемых движением поступательной волны на поверхности жидкости.

Рассмотрим в плоскости x, z двухслойное течение такое, что в невозмущенном состоянии область $z<0$ заполнена водой, а $z>0$ — воздухом (z — вертикальная, x — горизонтальная координата, ориентированная по направлению среднего переноса при $z>0$). Обозначим возвышение водной поверхности буквой η и введем вместо z новую переменную $\zeta=z-\eta$. Осредняя в этой системе координат исходные уравнения Новье — Стокса, отбрасывая моменты, содержащие пульсации η, и представляя согласно обычной рецептуре ([1]) тензор вторых моментов пульсаций скорости в виде произведения изотропного коэффициента турбулентной вязкости k и тензора деформации поля средней скорости с пренебрежением в нем членами, связанными с криволинейностью координат, получаем

$$\begin{gathered} u_t=(-uu-\rho^{-1}p+ku_x+g\eta)_x+(-uw+\eta_t u+\eta_x uu+\eta_x\rho^{-1}p+ku_\zeta)_\zeta, \\ w_t=(-uw+kw_x)_x+(-ww+\eta_t w+\eta_x uw-\rho^{-1}p+kw_\zeta)_\zeta, \\ u_x+(w-\eta_x u)_\zeta=0; \end{gathered} \tag{1}$$

здесь t — время; u, w — вертикальная и горизонтальная компоненты скорости (в координатах x, z); p — отклонение давления от гидростатического; ρ — плотность соответственно воздуха при $\zeta>0$ и воды при $\zeta<0$; g — ускорение силы тяжести, умноженное на единичную функцию от $-\zeta$ (т. е. $g=981$ см/сек^2 при $\zeta<0$ и $g=0$ при $\zeta>0$); нижние индексы означают дифференцирование по указываемой переменной.

Система (1) дополняется кинематическим условием

$$\eta_t=w_0-u_0\eta_x \tag{2}$$

(u_0, w_0 — компоненты скорости при $\zeta=0$) и следующим уравнением бюджета отнесенной к единице массы кинетической энергии турбулентности (к.э.т.):

$$\begin{gathered} e_t=(-ue+ke_x)_x+(-we+\eta_t e+\eta_x ue+ke_\zeta)_\zeta+ \\ +k(u_x^2+u_\zeta^2+w_x^2+w_\zeta^2)-\varepsilon=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Входящие в (1) и (3) коэффициент турбулентной вязкости k, скорость диссипации к.э.т. и ее масштаб l выражаются через e с помощью гипотез замыкания ([2])

$$k=(e/c)^{1/2}l, \qquad \varepsilon=(e/c)^{3/2}l^{-1}, \qquad l=\varkappa|\zeta|, \tag{4}$$

где $\varkappa=0{,}4$ и $c=4{,}6$ — безразмерные константы.

Система (1) — (4) решается численно в прямоугольной области горизонтальной протяженностью X (равной длине максимальной волны), глу-

биной в воде Z_w и высотой в воздухе Z_a (составляющими соответственно длину и несколько высот максимальной волны). По оси x все переменные, т. е. u, w, p, η, e, и их производные по x считаются периодическими с периодом X. На верхней границе области задаются вертикальный турбулентный поток импульса или скорость трения u_* и определяемая ими энергия турбулентности и предполагается затухание вертикальной скорости и возмущений давления:

$$ku_\zeta=u_*^2,\quad e=cu_*^2,\quad w=0,\ p=0 \text{ при } z=Z_a. \tag{5}$$

На нижней границе, расположенной на дне бассейна, для скорости принимается условие прилипания, а энергия турбулентности определяется придонной скоростью трения v_*:

$$u=0,\quad w=0,\quad e=cv_*^2 \quad \text{при } z=-Z_w. \tag{6}$$

Поскольку давление p практически приходится находить путем решения уравнения второго порядка (эллиптического типа), при $z=-Z_w$ добавляется еще одно граничное условие для p, получаемое подстановкой (6) в конечно разностный аналог уравнений (1). Скорость трения у дна рассчитывается с помощью логарифмического пристеночного закона

$$v_*=c_\tau^{1/2}u_1, \tag{7}$$

где $c_\tau=\varkappa^2[\ln(D-Z_w)/z_0]^{-2}$ — коэффициент сопротивления, D — глубина, u_1 — горизонтальная скорость на ближайшем ко дну расчетном уровне, z_0 — параметр шероховатости дна.

Тангенциальное напряжение трения на поверхности воды τ_S не терпит разрыва, и для его определения используется аналогичная (7) формула

$$\tau_S=\rho_a c_\tau(\Delta u)^2; \tag{8}$$

здесь ρ — плотность воздуха, c_τ — коэффициент сопротивления того же типа, что и в (6), (7), но, разумеется, с другим z_0, $\Delta u=(u^+-u^-)+\eta_x(w^+-w^-)$, где верхние индексы плюс или минус указывают, что переменная берется на расстоянии полушага вверх или вниз от поверхности раздела. В условиях океана шероховатость водной поверхности приходится описывать параметрически, так как она определяется высокочастотным участком спектра волн ([3]), воспроизвести который в рамках численных экспериментов предлагаемого типа затруднительно из-за большого объема вычислений. При имитации лабораторных экспериментов поверхность воды чаще всего можно считать гладкой и использовать для оценки z_0 формулу

$$z_0=m\nu/u_*, \tag{9}$$

($\nu=0{,}158$ — молекулярная вязкость воздуха, m — коэффициент порядка 0,1).

В рамках сделанных предположений u_ζ и w_ζ должны удовлетворять условиям склейки

$$\rho ku_\zeta=\tau_S,\quad \rho kw_\zeta=\eta_x\tau_S \quad \text{при } \zeta=0. \tag{10}$$

В реальных условиях высокочастотные возмущения поверхности могут генерировать энергию турбулентности сверху и снизу от поверхности раздела, и, в частности, происходит обрушивание волн. В лабораторных экспериментах эти явления, как правило, отсутствуют, так что можно считать, что $ke_\zeta=0$ при $\zeta=0$.

Изложенная выше модель предназначена для воспроизведения развития волнового поля под действием ветра. Ее реализация предъявляет высокие требования к точности разностной схемы и связана с большими затратами машинного времени. Естественно начинать подобные расчеты с менее громоздкой задачи по воспроизведению структуры ветрового поля над волнами в лабораторном эксперименте. Для этого были выбраны данные измерений скорости в аэрогидродинамическом лотке над волнами длиной 40,8 см и высотой a=0,64 см ([4]). Глубина лотка составляла 21 см, а фазовая скорость волн 79,6 см/сек, так что для пробега волной расстояния 396 см от волнопродуктора до рабочей части требовалось 5 сек. На этом расстоянии над волнами успевал возникнуть пограничный слой толщиной около 8 см, внутри которого и производились измерения.

Для численного воспроизведения этого эксперимента с помощью конечно-разностных аналогов уравнений (1)—(3) использовалась сетка, насчитывающая 300 узлов: 10 шагов по горизонтали, 15 шагов в воде и 15 в воздухе по вертикали. Шаг по вертикали был принят равным 1 см, а по горизонтали 4,08 см, так что Z_a и Z_w составляли по 15 см, а X было принято равным длине волны, т. е. 40,8 см. Скорость и уровень определялись интегрированием уравнений (1) по явной схеме, а давление рассчитывалось с помощью уравнения второго порядка, получаемого подстановкой первых двух уравнений (1) в третье. Шаг по времени выбирался порядка $\Delta t=\Delta x(4u)^{-1}$, где u — скорость на верхней границе области. Интегрирование производилось до 5 сек. Так как волны в моделируемом эксперименте практически не содержали высокочастотных компонент, параметр шероховатости поверхности определялся по формуле (9) с коэффициентом m=0,23, определенным по данным ([4]).

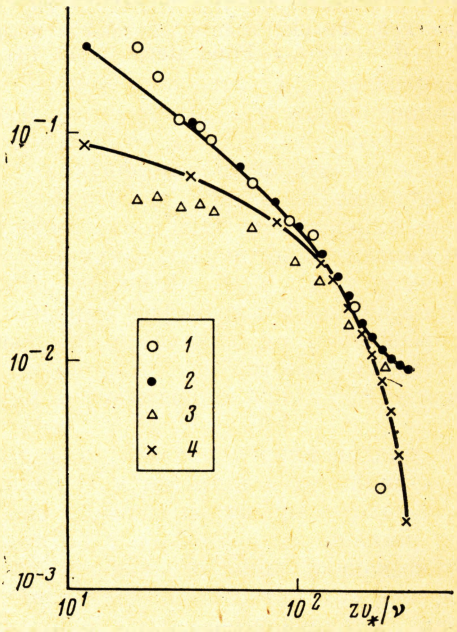


Рис. 1. Сопоставление экспериментальных данных ([4]) с результатами теоретических расчетов по уравнениям (1)—(3). *1*, *2* — нормированная амплитуда продольной компоненты волновой составляющей скорости в воздушном потоке над волнами $Uva^{-1}v_*^{-2}$, *3*, *4* — то же для вертикальной составляющей $Wva^{-1}v_*^{-2}$ (*1*, *3* — эксперимент; *2*, *4* — расчет)

В начальный момент задавалась бегущая волна по формулам теории волн малой амплитуды с амплитудой 0,64 см и логарифмическое распределение скорости при $\zeta>0$. В течение нескольких десятых секунды происходила взаимная подстройка полей скорости, давления и уровня, после чего в системе координат, перемешивающейся с фазовой скоростью волны, картина менялась очень мало. Рассчитанная фазовая скорость с точностью не менее 1% совпадала с наблюдаемой. В ходе расчетов с течением времени появлялись дополнительные моды, но их амплитуда составляла не более 5% амплитуды основной волны.

Переход к эйлеровой системе координат, в которой производились измерения, был сделан с помощью линейной интерполяции. На рис. 1 дано сопоставление амплитуд продольной и вертикальной волновых компонент скорости потока U и W на нескольких высотах по измерениям ([4]) и по численному эксперименту при u_*=3,36 см/сек. Согласованность теории и эксперимента позволяют надеяться, что проведение дальнейших исследо-

ваний проблем ветрового волнения на основе изложенной выше модели целесообразно.

Автор благодарен Л. М. Бреховских, Г. И. Баренблатту и С. С. Зилитинкевичу за внимание к работе и замечания.

Ленинградское отделение
Института океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило
19 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. С. Монин, А. М. Яглом,* Статистическая гидромеханика, ч. 1, «Наука», 1965. [2] *А. Н. Колмогоров,* Изв. АН СССР, сер. физ., т. 6, № 1–2 (1942). [3] *С. А. Китайгородский,* Физика взаимодействия атмосферы и океана, Л., Гидрометеоиздат, 1970. [4] *R. H. Stewart,* J. Fluid Mech., v. 42, 733 (1970).