Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 517.948.513.88:518

МАТЕМАТИКА

С. АШИРОВ, Я. Д. МАМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА — ФРЕДГОЛЬМА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 22 III 1976)

Пусть E — некоторое банахово пространство. Через E_T обозначим пространство непрерывных абстрактных функций $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, со значениями из E и с нормой

$$\|x(t)\|_{E_T}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|_E.$$

Через S_T обозначим шар из E с центром в некоторой точке $x_0\in E$ и радиусом r.

Пусть $F(t, x_t, y_T)$ есть нелинейный оператор Вольтерра при фиксированном y_T (т. е. при фиксированном $t\in[0, T]$ он действует из E_t в E), а при фиксированном (t, x_t) есть нелинейный оператор Фредгольма (т. е. он действует из E_T в E_T).

Будем исследовать решения уравнения Вольтерра — Фредгольма

$$x(t)=x_0+F(t, x_t, x_T) \tag{1}$$

в E_T.

Уравнение (1), когда оператор $F(t, x_t, y_T)$ не зависит от y_T, превращается в «обычное» нелинейное операторное уравнение Вольтерра, которое исследовано впервые А. Н. Тихоновым ([1]) (см. также ([2])). А в случае, когда $F(t, x_t, y_T)$ зависит лишь от y_T, для решения уравнения (1) известно довольно много принципов неподвижных точек и приближенных методов. Уравнение (1) в общем виде исследуется впервые.

Примером уравнения (1) может служить, например, уравнение

$$x(t)=\Phi\left\{t, \int_0^t K_1[t, s; x(s)]ds, \int_0^T K_2[t, s; x(s)]ds\right\}. \tag{2}$$

1. Пусть C_T — пространство непрерывных функций, определенных на $[0, T]$. Пусть $Ш_T{}^+=\{u(t)\in C_T,\ 0\leqslant u(t)\leqslant 2r\}$. Пусть, наконец, $\varphi(t, u_t, v_T)$ — нелинейный скалярный оператор Вольтерра при фиксированном v_T (т. е. при фиксированном $t\in[0, T]$ он действует из $Ш_t{}^+$ в $[0, \infty)$, а при фиксированном (t, u_t) есть нелинейный скалярный оператор Фредгольма (т. е. он действует из $Ш_T{}^+$ в $Ш_T{}^+$).

Ниже всюду будем предполагать, что:

а) если $u^{(n)}(t)$, $v^{(n)}(t)\in Ш_T{}^+$, $n=1, 2, \ldots$, $u^{(n+1)}(t)\leqslant u^{(n)}(t)$, $v^{(n+1)}(t)\leqslant v^{(n)}(t)$ и

$$\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t)=u(t),\quad \lim_{n\to\infty}v^{(n)}(t)=v(t)$$

при $t\in[0, T]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(t, u_t^{(n)}, v_T^{(n)})=\varphi(t, u_t, v_T),\quad 0\leqslant t\leqslant T;$$

б) если $u(t)$, $v(t)\in Ш_T{}^+$, то $\tilde{u}(t)=\varphi(t, u_t, v_T)$ есть непрерывная функция на $[0, T]$ и $0\leqslant\tilde{u}(t)\leqslant 2r$.

Имеет место следующая очевидная лемма об операторных неравенствах.

Лемма. *Пусть оператор* $\varphi(t, u_t, v_\tau)$ *не убывает по второму и третьему аргументам. Пусть непрерывная функция* $v(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $0\leqslant v(t)\leqslant 2r$, *удовлетворяет неравенству*

$$v(t)\leqslant\varphi(t, v_t, v_\tau), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Тогда $v(t)\leqslant u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *где* $u(t)$ *является верхним решением уравнения*

$$u(t)=\varphi(t, u_t, u_\tau),$$

определенным на $[0, T]$.

2. Итерационный процесс для приближенного решения уравнения (1) построим равенствами

$$x^{(0)}(t)=x_0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(t, x_t^{(n-1)}, x_\tau^{(n-1)}), \quad n=1, 2, \ldots$$

Теорема 1. *Пусть оператор* $F(t, x_t, y_\tau)$ *определен на топологическом произведении* $R=[0, T]\times S_\tau\times S_\tau$, *непрерывен и удовлетворяет условию*

$$\max_R \|F(t, x_t, y_\tau)\|\leqslant r. \tag{4}$$

Пусть, кроме того, в R *выполнено условие*

$$\|F(t, x_t, y_\tau)-F(t, \bar{x}_t, y_\tau)\|\leqslant\varphi(t, \|x_t-\bar{x}_t\|, \|y_\tau-\bar{y}_\tau\|),$$

где $\varphi(t, u_t, v_\tau)$ *удовлетворяет условиям леммы и уравнение*

$$u(t)=\varphi(t, u_t, u_\tau) \tag{5}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение и оно является пределом последовательных приближений* (3), *причем скорость сходимости определяется формулой*

$$\|x^{(n)}(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon^{(n)}(t),$$

где

$$\varepsilon^{(1)}(t)=\varphi(t, 2r, 2r),$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(t)=\varphi(t, \varepsilon_t^{(n)}, \varepsilon_\tau^{(n)}), \quad n=1, 2, \ldots$$

Теперь для приближенного решения уравнения (1) итерационный процесс построим равенствами

$$x^{(0)}(t)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \quad x^{(n)}(t)=x_0+F(0, x_0, x_\tau^{(n-1)}),\ 0\leqslant t\leqslant T/n,$$

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(t-T/n, x_{t-T/n}^{(n)}, x_\tau^{(n-1)}), \quad T/n\leqslant t\leqslant T, \quad n=1, 2, \ldots \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть оператор* $F(t, x_t, y_\tau)$ *определен на топологическом произведении* R, *непрерывен и удовлетворяет условию* (4). *Пусть кроме того, в* R *выполнено условие*

$$\|F(t-\Delta t, x_{t-\Delta t}, y_\tau)-F(t, \bar{x}_t, \bar{y}_\tau)\|\leqslant\omega(t, \Delta t)+\varphi(t, \|x_t-\bar{x}_t\|, \|y_\tau-\bar{y}_\tau\|),$$

где непрерывная функция $\omega(t, \Delta t)$, $0\leqslant t-\Delta t$, $t\leqslant T$, $\Delta t\geqslant 0$, *не убывает по* Δt *и*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\omega(t, \Delta t)=0,$$

а скалярный оператор $\varphi(t, u_t, v_\tau)$ *удовлетворяет условиям леммы и уравнение* (5) *имеет лишь нулевое решение. Предполагается, что*

$$\varphi(t, u_t, v_\tau)+\omega(t, T)\leqslant 2r$$

и при любой фиксированной функции $\alpha(t)\in Ш_T^+$ *и для любого фиксированного числа* $\delta\in[0, \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(t, T)]$ *уравнение*

$$u(t)=\varphi(t, u_t, \alpha_T)+\delta \tag{7}$$

имеет единственное решение из $Ш_T^+$.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение и это решение является пределом последовательных приближений* (6), *причем скорость сходимости определяется формулой*

$$\|x^{(n)}(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon^{(n)}(t),$$

где

$$\varepsilon^{(1)}(t)=\varphi(t, \varepsilon_t^{(1)}, 2r)+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(t, T),$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(t)=\varphi(t, \varepsilon_t^{(n-1)}, \varepsilon_T^{(n)})+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\omega\left(t, \frac{T}{n+1}\right).$$

3. В этом пункте для нахождения решения уравнения (1) будем строить и исследовать сходимость итерационных процессов в предположении, что для любой фиксированной функции $\xi(t)\in S_T$ нелинейное операторное уравнение Фредгольма

$$x(t)=x_0+F(t, \xi_t, x_T) \tag{8}$$

имеет единственное решение $x(t)\in S_T$ и его можно найти.

Последовательные приближения построим с помощью уравнений

$$x^{(0)}(t)=x_0, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(t, x_t^{(n-1)}, x_T^{(n)}), \quad n=1, 2, \ldots \tag{9}$$

или

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(0, x_0, x_T^{(n)}), \quad 0\leqslant t\leqslant T/n,$$

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(t-T/n, x_{t-T/n}^{(n)}, x_T^{(n)}), \quad T/n\leqslant t\leqslant T, \quad n=1, 2, \ldots \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Пусть, кроме того, при любой фиксированной функции* $\beta(t)\in Ш_T^+$ *уравнение*

$$u(t)=\varphi(t, \beta_t, u_T)$$

имеет единственное решение из $Ш_T^+$.

Тогда существует единственное решение уравнения (1) *и оно является пределом приближений* (9), *причем скорость сходимости определяется формулой*

$$\|x^{(n)}(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon^{(n)}(t),$$

где

$$\varepsilon^{(1)}(t)=\varphi(t, 2r, \varepsilon_T^{(1)}),$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(t)=\varphi(t, \varepsilon_t^{(n)}, \varepsilon_T^{(n+1)}).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2 *лишь с той разницей, что вместо уравнения* (7) *будем брать уравнение*

$$u(t)=\varphi(t, u_t, u_T)+\delta, \tag{11}$$

т. е. будем предполагать, что для любого фиксированного числа $\delta\in[0, \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(t, T)]$ *уравнение* (11) *имеет единственное решение из* $Ш_T^+$.

Тогда существует единственное решение уравнения (1) *и оно является пределом приближений* (10), *причем скорость сходимости определяется формулой*

$$\|x^{(n)}(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\varepsilon^{(n)}(t)$ *является решением уравнения*

$$u(t)=\varphi(t,\ u_t,\ u_T)+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(t,\ T/n).$$

4. При построении итерационных процессов (9) и (10) мы предполагали, что уравнение (8) имеет единственное решение и его можно найти. Теперь допустим, что мы не можем его найти, а предположим, что нелинейное операторное уравнение Вольтерра

$$x(t)=x_0+F(t,\ x_t,\ \xi_T)$$

имеет единственное решение для любой фиксированной функции $\xi(t)\in S_T$ и его можно найти.

В этом случае итерационный процесс построим следующим образом:

$$x^{(0)}(t)=x_0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$x^{(n)}(t)=x_0+F(t,\ x_t^{(n)},\ x_T^{(n-1)}),\quad n=1,2,\ldots \tag{12}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Пусть, кроме того, при любой фиксированной функции* $\alpha(t)\in Ш_T{}^+$ *уравнение*

$$u(t)=\varphi(t,\ u_t,\ \alpha_T)$$

имеет единственное решение из $Ш_T{}^+$.

Тогда существует единственное решение уравнения (1) *и оно является пределом приближений* (12), *причем*

$$\|x^{(n)}(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon^{(n)}(t),$$

где

$$\varepsilon^{(1)}(t)=\varphi(t,\ \varepsilon_t^{(1)},\ 2r),$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(t)=\varphi(t,\ \varepsilon_t{}^{(n+1)},\ \varepsilon_T^{(n)}).$$

В заключение заметим, что во всех приведенных выше теоремах последовательности $\varepsilon^{(n)}(t)$ не убывают и равномерно по $t\in[0,\ T]$ стремятся к нулю.

Далее, заметим, что указанные выше теоремы по стандартной схеме применяются к исследованию решения уравнения (2).

Наконец, заметим, что можно положить

$$\varphi(t,u_t,v_T)\equiv L_1\int_0^t u(s)\,ds+L_2\int_0^T v(s)\,ds,\quad 0\leqslant L_1,L_2;\quad L_2<1.$$

В этом частном случае можно определить конкретные выражения $\varepsilon_n(t)$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
6 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов*, Бюлл. Московск. ун-та, Секция А, в. 8, т. 1, 1 (1938). [2] *Я. Д. Мамедов*. Сибирск. матем. журн., т. 5, № 6, 1305 (1964). [3] *Я. Д. Мамедов, В. М. Мусаев*, ДАН, т. 195, № 1, 36 (1970). [4] *А. П. Махмудов, В. П. Мусаев*, Докл. АН АзербССР, № 5, 3 (1969). [5] *Я. Д. Мамедов*, Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, Баку, 1974.