Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 518:517.948

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ГАПОНЕНКО

МЕТОД ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 II 1976)

Развитая в последнее время теория регуляризации позволяет строить методы устойчивого решения линейных некорректных задач (см., например, [1–5]). В настоящей работе предлагается метод регуляризации в пространстве непрерывных функций.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Au=f, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, удовлетворяющий условиям

$$f\in R(A)\subseteq L_2[0,1] \quad \text{(существование)}, \tag{2а}$$

$$\operatorname{Ker} A\equiv\{v:\ Av=0\}=0 \quad \text{(единственность)}, \tag{2б}$$

$$D(A),\ R(A^*) \text{ плотны в } L_2[0,1]. \tag{2в}$$

Обозначим через $u(x)$ точное решение уравнения (1). Пусть $u(x)\in C[0,1]$ и пусть элемент f задан приближенно:

$$f^\delta:\ \|f^\delta-f\|\leqslant\delta,\quad 0<\delta\leqslant 1.$$

Здесь и всюду ниже через $\|\cdot\|$ обозначается норма в метрике $L_2[0,1]$. Требуется построить линейный регуляризатор R^δ, удовлетворяющий условию

$$\|R^\delta f^\delta-u\|_{C[0,1]}\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0. \tag{3}$$

2. Идея метода. Зафиксируем произвольное натуральное число n и рассмотрим набор элементов $e_{in}(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$e_{in}=\begin{cases} n, & x\in\left(\dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n}\right)\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n}\right)\end{cases}.$$

Обозначим через u_{in} среднее значение функции $u(x)$ на отрезке $Q_{in}=\left(\dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n}\right)$:

$$u_{in}\equiv\langle u,\ e_{in}\rangle,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Заметим, что числа u_{in} дают приближенное представление о функции $u(x)$ в равномерной метрике:

$$|u(x)-u_{in}|<\omega(1/n),\quad \forall x\in Q_{in},$$

где $\omega(\tau)$ — модуль непрерывности точного решения. С другой стороны, предполагая дополнительно, что $R(A)$ плотно в $L_2[0,1]$ и $e_{in}\in R(A^*)$, $i=1,2,\ldots,n$, получим:

$$u_{in}=\langle A^{-1}f,e_{in}\rangle=\langle f,(A^{-1})^*e_{in}\rangle=\langle f,(A^*)^{-1}e_{in}\rangle.$$

Введем обозначение:

$$\psi_{in} \equiv (A^*)^{-1} e_{in}, \quad i=1, 2, \ldots, n;$$

тогда справедливо

$$u_{in} = \langle f, \psi_{in} \rangle.$$

Определение. Набор функций $\{\psi_{in}\}$, $i=1, 2, \ldots, n$, будем называть дискретной функцией Грина (д.ф.Г.) для задачи (1). Из определения д.ф.Г. непосредственно следует, что задача приближенного решения уравнения (1) сводится к построению д.ф.Г.

3. Общая схема метода д. ф. Г. Зафиксируем функции $r(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$, $\Omega(\delta)$ со следующими свойствами:

1) $r=r(\delta)$ — непрерывная монотонная положительная функция, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, удовлетворяющая условию $r(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, причем $r(\delta) = o(1/\delta)$;

2) $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ — непрерывная монотонная положительная функция, $0 < \delta \leqslant 1$, удовлетворяющая условию $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;

3) $\Omega=\Omega(\tau)$ — непрерывная монотонная положительная функция, $0 < \tau \leqslant 1$, удовлетворяющая условиям $\Omega(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$, $\Omega(1)=1$.

Введем следующие обозначения:

$$\psi_{in}^{\delta}: \ \|A^* \psi_{in}^{\delta} - e_{in}\| \leqslant \inf_{v \in W^{\delta}} \|A^* v - e_{in}\| + \varepsilon(\delta), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где $W^{\delta} = \{v: v \in D(A^*), \ \|v\| \leqslant r(\delta)\}$, $n=1, 2, \ldots,$ $\operatorname{ant}(1/\Omega^{-1}(\delta)]$, и

$$N=N(\delta) = \max \{n: \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|A^* \psi_{in}^{\delta} - e_{in}\| + \delta \|\psi_{in}^{\delta}\|) \leqslant \Omega(1/n)\}.$$

Если указанное выше множество натуральных чисел $\{\ldots\}$ пусто, то полагаем $N=1$.

Определим теперь линейный регуляризатор R^{δ}:

$$u^{\delta} \equiv R^{\delta} f^{\delta} \equiv \sum_{i=1}^{N} \langle f^{\delta}, \psi_{iN}^{\delta} \rangle \frac{e_{iN}}{N}. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть оператор A в задаче* (1) *удовлетворяет условиям* (2) *и пусть точное решение $u(x) \in C[0, 1]$.*

Тогда для приближенного решения u^{δ} справедливо

$$\|u^{\delta} - u\|_M \equiv \sup_{0 < x < 1} |u^{\delta}(x) - u(x)| \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0,$$

причем имеет место апостериорная оценка

$$\|u^{\delta} - u\|_M \leqslant \omega\left(\frac{1}{N}\right) + \max(1, \|u\|)\, \Omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Доказательство. Из определения нормы в пространстве M следует

$$\|u^{\delta} - u\|_M \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \{ \sup_{x \in Q_{iN}} |u^{\delta}(x) - u(x)| \}.$$

Пусть $x \in Q_{iN}$, тогда справедлива оценка

$$|u^{\delta}(x) - u(x)| \equiv |\langle f^{\delta}, \psi_{iN}^{\delta} \rangle - \langle f, \psi_{iN}^{\delta} \rangle| + |\langle f, \psi_{iN}^{\delta} \rangle - \langle u, e_{iN} \rangle| +$$

$$+ |\langle u, e_{iN} \rangle - u(x)| \leqslant \delta \|\psi_{iN}^{\delta}\| + \|u\| \cdot \|A^* \psi_{iN}^{\delta} - e_{iN}\| + \omega\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{1}{N}\right) + \max(1, \|u\|)\, \Omega\left(\frac{1}{N}\right). \tag{5}$$

Так как по условию теоремы $R(A^*)$ плотно в $L_2[0, 1]$, то справедливо

$$N=N(\delta)\to\infty \quad \text{при} \quad \delta\to 0. \tag{6}$$

Сходимость метода непосредственно вытекает из оценки (5) и условия (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Для получения сходимости в метрике $C[0, 1]$ достаточно выполнить некоторое «сглаживание»:

$$v^\delta(x)=\begin{cases} u^\delta\left(\dfrac{1}{2N}\right), & \text{если } 0\leqslant x<\dfrac{1}{2N}; \\ u^\delta\left(\dfrac{i}{N}-\dfrac{1}{2N}\right)+N\left[u^\delta\left(\dfrac{i}{N}+\dfrac{1}{2N}\right)-u^\delta\left(\dfrac{i}{N}-\dfrac{1}{2N}\right)\right]x, \\ \qquad \text{если } \dfrac{i}{N}-\dfrac{1}{2N}\leqslant x<\dfrac{i}{N}+\dfrac{1}{2N}, \quad i=1, 2, \ldots, N-1; \\ u^\delta\left(1-\dfrac{1}{2N}\right), & \text{если } 1-\dfrac{1}{2N}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Для функции $v^\delta(x)$ справедлива оценка:

$$\|v^\delta(x)-u(x)\|_{C[0,1]}=O\left[\omega\left(\frac{1}{N}\right)+\Omega\left(\frac{1}{N}\right)\right].$$

Замечание 2. Рассмотренный выше метод д.ф.Г. обладает определенной универсальностью:

1) если $u(x)\in L_2[0, 1]$, то $\|u^\delta-u\|\to 0$ при $\delta\to 0$;

2) если $u(x)\in L_2[0, 1]$ и непрерывна в точке $x_0\in[0, 1]$, то $|u^\delta(x_0)-u(x_0)|\to 0$ при $\delta\to 0$.

3) если $u(x)$ — кусочно-непрерывная функция на $[0, 1]$, то на каждом замкнутом отрезке непрерывности имеет место равномерная сходимость.

Замечание 3. Метод без существенных изменений переносится на случай приближенного задания оператора A, $D(A)\subseteq L_2[Q]$, где Q — ограниченная область произвольной размерности.

Замечание 4. Метод можно использовать для приближенного решения интегральных уравнений и краевых задач.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов*, ДАН, т. 153, № 1 (1963). [2] *В. А. Морозов*, Методы решения неустойчивых задач, М., Изд-во МГУ, 1967. [3] *А. Б. Бакушинский*, Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач, М., Изд-во МГУ, 1968. [4] *А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 2 (1973). [5] *В. А. Винокуров, Ю. И. Петунин, А. Н. Плиско*, ДАН, т. 220, № 3 (1975).