Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

А. П. ЗАМЯТИН

МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ, ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОТОРЫХ РАЗРЕШИМА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 24 II 1976)

Проблема разрешения элементарных теорий основных классов алгебраических структур (групп, абелевых групп, полугрупп, колец, полей) была решена к началу пятидесятых годов в трудах А. Тарского, Д. Робинсона, В. Шмелевой. Позднее, в шестидесятых годах, А. И. Мальцев и его ученики, существенно улучшив методику доказательства неразрешимости (и разрешимости), получили простое доказательство упомянутых выше результатов и решили проблему разрешения элементарных теорий различных изучавшихся в алгебре подклассов основных классов алгебраических структур. Среди этих подклассов многие являются многообразиями — объектами, наиболее интенсивно изучаемыми в алгебре в последнее время. Поэтому представляет интерес развитие указанных исследований в следующем направлении: описание подмногообразий данного многообразия алгебраических структур, имеющих разрешимую элементарную теорию.

Ю. Л. Ершов в работе ([1]) доказал, что если многообразие групп содержит конечную неабелеву группу, то элементарная теория этого многообразия неразрешима. Автор настоящей статьи решил проблему разрешимости элементарных теорий полугрупп с точностью до групп; это решение содержится в ([2]). Данная статья посвящена решению аналогичного вопроса для ассоциативных колец. Доказательства утверждений, в основном, не приводятся, описываются только некоторые идеи доказательства. Исключение сделано для доказательства необходимости теоремы 1, которое приведено довольно полно. Все необходимые определения, относящиеся к элементарным теориям, взяты из ([3]), относящиеся к кольцам — из ([4]). В статье рассматриваются только ассоциативные кольца.

Введем обозначения для двух классов многообразий. Символом $\mathfrak{M}_p$ будем обозначать многообразие, определяемое тождествами $xyz=xy-yx=px=0$, символом $\mathfrak{N}_p$ — многообразие, определяемое тождествами $xyz=x^2=px=0$ (p — простое число в обоих случаях). Известно, что элементарная теория $\mathfrak{M}_p$ наследственно неразрешима (см., например, теорему 3.3.5 из ([3])).

Лемма 1. *Элементарная теория $\mathfrak{N}_p$ наследственно неразрешима.*

Лемма 1 доказывается методом относительной элементарной определимости, описанным в ([5]). Из леммы 1 и наследственной неразрешимости элементарной теории $\mathfrak{M}_p$ легко следует лемма 2, описывающая многообразия нильпотентных колец с разрешимой теорией.

Лемма 2. *Многообразие $\mathfrak{M}$ нильпотентных колец имеет разрешимую теорию тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — многообразие колец с нулевым умножением.*

К противоположной в некотором смысле ситуации относится следующая

Лемма 3. *Пусть R — ассоциативное кольцо с правой единицей, содержащее ненулевой нильпотентный элемент. Тогда элементарная теория многообразия, порожденного кольцом R, наследственно неразрешима.*

Эта лемма также доказывается методом относительной элементарной определимости. Многообразия ассоциативных колец с разрешимой элементарной теорией описывает

Теорема 1. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных колец имеет разрешимую элементарную теорию тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ порождается конечным (возможно, пустым) множеством конечных полей и некоторым кольцом с нулевым умножением.*

Доказательство. Пусть элементарная теория многообразия $\mathfrak{M}$ разрешима. Докажем вначале, что на кольцах из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $x^2=x^4g(x)$, где $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тождества многообразия $\mathfrak{M}$ мы будем записывать в виде $f(v_1, \ldots, v_n)=0$, где $f(v_1, \ldots, v_n)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Достаточно ограничиться тождествами, все одночлены многочлена f которых содержат в качестве сомножителя все буквы $v_1, \ldots, v_n$. Нижней степенью тождества $f=0$ назовем наименьшую из степеней одночленов многочлена f. Символом $O(x^\alpha)$ (символом $O(x^\alpha y^\beta)$) мы будем обозначать многочлен от x (от x, y), нижняя степень которого больше α (больше $\alpha+\beta$). Если нижняя степень всех тождеств, истинных на $\mathfrak{M}$, больше 2, то $\mathfrak{M}$ содержит многообразие $\mathfrak{M}_2$. Это противоречит разрешимости элементарной теории $\mathfrak{M}$. Следовательно, на кольцах из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество, нижняя степень которого меньше 3. Рассмотрим все такие тождества, истинные на $\mathfrak{M}$. Они могут быть одного из четырех видов:

$$a_ix+b_ix^2+O(x^2)=0, \quad c_ix^2+O(x^2)=0,$$
$$d_ixy+O(xy)=0, \quad k_ixy+m_iyx+O(xy)=0,$$

где a_i, c_i, d_i, k_i и $m_i\neq 0$.

Пусть

$$a=\text{НОД}(a_i), \quad b=\text{НОД}(b_i), \quad c=\text{НОД}(c_i), \quad d=\text{НОД}(d_i),$$
$$n=\text{НОД}(k_i+m_i)$$

(НОД — наибольший общий делитель, НОД пустого множества равен нулю). Легко видеть, что $c\neq 0$ и что a, d и n делятся на c. Поэтому если $\text{НОД}(b, c)\neq 1$, то $\mathfrak{M}$ содержит многообразие $\mathfrak{M}_q$, где q — простой делитель $\text{НОД}(b, c)$. Следовательно, $c=1$ и на $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $a_0x+x^2+O(x^2)=0$. Из тождества $a_0x+x^2+O(x^2)=0$ следует тождество $2x^2+O(x^2)=0$. Это означает, что $c=1$ или $c=2$. Если $c=2$, то сумма k_i+m_i делится на 2, поэтому и разность k_i-m_i тоже делится на 2. В таком случае $\mathfrak{M}$ содержит $\mathfrak{N}_2$. Следовательно, $c=1$ и на $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $x^2+O(x^2)=0$. Это тождество можно записать в виде $x^2=x^2f(x)$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами без свободного члена. Из тождества $x^2=x^2f(x)$ следует тождество $x^2=x^2f^3(x)$; многочлен $f^3(x)$ можно записать в виде $x^2g(x)$. Таким образом, на кольцах из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $x^2=x^4g(x)$.

Докажем, используя только что полученный результат, что если $R\in\mathfrak{M}$, то радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R есть кольцо с нулевым умножением. Пусть $R\in\mathfrak{M}$ и $x\in J(R)$. Тогда $x^2g(x)=0$, потому что $x^2g(x)$ — идемпотент, а $J(R)$ не содержит ненулевых идемпотентов (см. [6], стр. 83). Следовательно, $J(R)$ удовлетворяет тождеству $x^2=0$. Если a, $b\in J(R)$, то кольцо Q, порожденное элементами a и b, нильпотентно. По лемме 2 Q — кольцо с нулевым умножением (поскольку многообразие, порожденное кольцом Q, конечно базируемо).

Многообразие $\mathfrak{M}$ содержит лишь конечное множество (попарно неизоморфных) полей, поскольку на кольцах из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество $x^2=x^4g(x)$. Поэтому для доказательства необходимости теоремы 1 достаточно показать, что всякое подпрямо неразложимое кольцо из $\mathfrak{M}$ есть либо конечное поле, либо кольцо с нулевым умножением. Предположим противное, пусть многообразие $\mathfrak{M}$ содержит подпрямо неразложимое кольцо R такое, что $R\neq J(R)$ и $J(R)\neq 0$. Тогда, в силу леммы 3 $R/J(R)$ — под-

прямое произведение полей. Пусть e — ненулевой идемпотент из R, Q — полный прообраз главного идеала $(e+J(R))$ при каноническом отображении $R \to R/J(R)$. Рассмотрим множества $K=\{ue \mid u \in J(R)\}$ и $M=\{ue-u \mid u \in J(R)\}$. Нетрудно проверить, что K и M — идеалы кольца R и что $K \cap M=0$. Следовательно, $K=0$ или $M=0$, поскольку R подпрямо неразложимо. Если $K \neq 0$, то $M=0$ и $J(R)=0$. Действительно, в случае $M=0$ и $J(R) \neq 0$ идемпотент e является правой единицей кольца, порожденного e и ненулевым элементом из $J(R)$. Это, в силу леммы 3, противоречит разрешимости элементарной теории $\mathfrak{M}$. Таким образом, $K=0$. Равенство $K=0$ означает, что левый аннулятор кольца Q равен $J(R)$. Аналогично доказываем, что правый аннулятор кольца Q равен $J(R)$. В таком случае кольцо Q^2 является идеалом в R, содержащем единицу, и поэтому выделяется в R прямым слагаемым. Получили противоречие с подпрямой неразложимостью R. Таким образом, всякое подпрямо неразложимое кольцо из $\mathfrak{M}$ есть либо конечное поле, либо кольцо с нулевым умножением. Необходимость теоремы 1 доказана.

Нетрудно понять, что достаточность теоремы 1 следует из разрешимости элементарной теории многообразия, порожденного конечным полем. Разрешимость элементарной теории многообразия $\mathfrak{P}$, порожденного полем из двух элементов, следует из разрешимости элементарной теории дистрибутивных решеток с относительными дополнениями. Действительно, всякое кольцо из $\mathfrak{P}$ (и только такое кольцо) можно формульно определить в подходящей дистрибутивной решетке с относительными дополнениями, положив $x+y=x \Delta y$ и $xy=x \wedge y$. Разрешимость указанной теории решеток доказана в ([7]). Аналогично можно доказать разрешимость элементарной теории многообразия, порожденного полем из трех элементов. Только в этом случае элемент кольца будет представляться парой элементов подходящей решетки. Для аналогичного представления кольца из многообразия, порожденного произвольным конечным полем, необходимы уже дистрибутивные решетки с относительными дополнениями и выделенной последовательностью идеалов. Однако элементарная теория указанных решеток также разрешима ([8]). Из разрешимости этой теории следует разрешимость элементарной теории многообразия, порожденного конечным полем, и, таким образом, достаточность теоремы 1.

Как часто случается при решении проблемы разрешимости, для многообразий $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{N}_p$ можно доказать более сильное утверждение, нежели наследственная неразрешимость элементарной теории. А именно, можно доказать, что в этих случаях множество тождественно истинных формул кольцевой сигнатуры рекурсивно неотделимо от множества формул, опровержимых на конечных кольцах из многообразия. В ситуации же, описываемой леммой 3, это не всегда так. Нетрудно, например, показать, что элементарная теория класса конечных колец из многообразия, порожденного кольцом вычетов по модулю 4, разрешима. Представляет поэтому интерес описание многообразий ассоциативных колец, элементарная теория класса конечных колец которых разрешима. Такие многообразия описаны в теореме 2. Прежде, чем ее сформулировать, введем понятие кольца типа i, $1 \leqslant i \leqslant 5$. Кольцом типа 1 назовем конечное поле; кольцом типа 2 — кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ над конечным полем; кольцом типа 3 — кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ над конечным полем; кольцом типа 4 — кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ над конечным полем, причем $a_2=a_1^{p^k}$, где p — характеристика поля, k — некоторое фиксированное натуральное число; кольцом типа 5 — кольцо Галуа характеристики p^2, где p — некоторое простое число (определение кольца Галуа и основные свойства можно найти в ([9])).

Теорема 2. *Элементарная теория класса конечных колец многообразия* $\mathfrak{M}$ *ассоциативных колец разрешима тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *порождается конечным (возможно, пустым) множеством колец типов* 1—5 *и некоторым кольцом с нулевым умножением.*

Доказательство необходимости теоремы 2 проходит по такой же схеме, что и доказательство теоремы 1, только существенно труднее. А именно, доказывается, что всякое подпрямо неразложимое кольцо из многообразия колец с разрешимой элементарной теорией класса конечных колец есть либо кольцо с нулевым умножением, либо кольцо одного из типов 1—5. Для доказательства достаточности устанавливается строение конечных колец из $\mathfrak{M}$, неразложимых (нетривиальным образом) в прямое произведение.

Автор глубоко признателен Л. Н. Шеврину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
4 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. Л. Ершов*, ДАН, т. 203, № 6, 1240 (1972). [2] *А. П. Замятин*, Алгебра и логика, т. 12, № 4, 417 (1973). [3] *Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров и др.*, УМН, т. 20, № 4, 37 (1965). [4] *И. Херстейн*, Некоммутативные кольца, М., «Мир», 1972. [5] *Ю. Л. Ершов*, ДАН, т. 161, № 1, 27 (1965). [6] *Н. Джекобсон*, Строение колец, М., 1961. [7] *Ю. Л. Ершов*, Алгебра и логика, т. 3, № 3, 17 (1964). [8] *M. Rabin*, Trans. Am. Math. Soc., v. 141, № 7, 1 (1969). [9] *R. Raghavendran*, Compositio Math., v. 21, № 2, 195 (1969).